DM 14 correction

Equation dans $\mathcal{L}(E)$ Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel non réduit à son vecteur nul. On s'intéresse aux endomorphismes f de E vérifiant la relation

$$f^2 = 3f - 2\,\mathrm{Id}_E\,. \quad (*)$$

Un exemple On définit l'application :

$$g \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (3x+2y, -x) \end{array} \right.$$

1. Montrer que g est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.
2. Donner la matrice de g, notée A, dans la base canonique.
3. Calculer $g \circ g$ et vérifier que g est solution de $(*)$
4. Déterminer $F = \ker(g - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2})$ et $G = \ker(g - 2\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2})$ et donner une base de F et une base de G.
5. Montrer que $F \cap G = \{0\}$
6. Soit $u = (1, -1)$ et $v = (-2, 1)$ Montrer que $B = (u, v)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
   Calcul de g^n
7. Premiere méthode
   (a) Donner la matrice de g, notée D, dans la base B
   (b) Donner la matrice, notée P, de l'identité relativement aux bases B au départ et la base canonique à l'arrivée.
   (c) Montrer que P est inversible et calculer $P^{-1}AP$.[1]
   (d) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n et l'expression de g^n.
8. Deuxième Méthode
   (a) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Exprimer (x, y) comme combinaison linéaire de u et v.
   (b) Calculer $g^n(u)$ et $g^n(v)$.
   (c) Donner finalement l'expression de $g^n(x, y)$ en fonction de x et y.
   (d) Donner la matrice de g^n dans la base canonique.

Etude de f On se place à nouveau dans le cas général et on s'intéresse à l'équation $(*)$.

1. Montrer que si f vérifie $(*)$ alors f est bijective et exprimer f^{-1} comme combinaison linéaire de f et de Id_E.
2. Déterminer les solutions de $(*)$ de la forme $\lambda\,\mathrm{Id}_E$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Etude des puissance de f On suppose dans la suite que f est une solution de $(*)$ et que f n'est pas de la forme $\lambda\,\mathrm{Id}_E$.

1. (a) Exprimer f^3 et f^4 comme combinaison linéaire de Id_E et f.
   (b) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, f^n peut s'écrire sous la forme $f^n = a_n f + b_n\,\mathrm{Id}_E$ avec $(a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$
2. (a) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} - 3a_n + 2a_{n-1} = 0$
   (b) En déduire une expression de a_n ne faisant intervenir que n.
   (c) Calculer alors b_n.

Correction 1.

1. J'ai pas encore tapé le corriger donc si vous obtenez pas D, essayez de calculer PAP^{-1}, mais je crois que c'est bon comme ca...

Un exemple

1. Soit $u = (x_1, y_1)$ et $v = (x_2, y_2)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} g(u+\lambda v) &= g((x_1,y_1)+\lambda(x_2,y_2)) \\ &= g((x_1+\lambda x_2, y_1+\lambda_2)) \\ &= (3(x_1+\lambda x_2)+2(y_1+\lambda y_2), -(x_1+\lambda x_2)) \\ &= 3(x_1+2y_1,-x_1)+\lambda(3x_2+2y_2,-x_2) \\ &= g(x_1,y_1)+\lambda g(x_2,y_2) \\ &= g(u)+\lambda g(v) \end{aligned}$$

   Ainsi g est linéaire. Comme l'espace de départ et d'arrivée de la fonction g est $\mathbb{R}^2$, g est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$

2. On obtient $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

3. $A^2 = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$ et $3A - 2I_2 = \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$
   Ainsi

$$A^2 = 3A - 2I_2$$

   L'endomorphisme g vérifie donc la propriété $(*)$

4. $A - I_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ Soit $(x,y) \in F$ on a alors

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   C'est-à-dire

$$\begin{cases} 2x+2y &= 0 \\ -x-y &= 0 \end{cases}$$

   On obtient donc $x = -y$ et

$$F = \{(-y,y) | y \in \mathbb{R}\}$$

   Autrement dit

$$F = \mathrm{Vect}((-1,1))$$

   De même $A - 2I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ Soit $(x,y) \in G$ on a alors

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   C'est-à-dire

$$\begin{cases} x+2y &= 0 \\ -x-2y &= 0 \end{cases}$$

   On obtient donc $x = -2y$ et

$$G = \{(-2y,y) | y \in \mathbb{R}\}$$

   Autrement dit

$$G = \mathrm{Vect}((-2,1))$$

5. Soit $u \in F \cap G$, On a alors

$$(g - Id)(u) = (g - 2Id)(u) = 0$$

   D'où

$$g(u) = u \quad \text{et} \quad g(u) = 2u$$

   Finalement $u = 2u$ c'ets à dire $u = (0,0)$
   Ainsi

$$F \cap G = \{(0,0)\}$$

6. (u, v) forment une famille libre étant 2 vecteurs non propotionnels. Comme $\text{Card}(u, v) = 2 = \dim(R^2)$ c'est une base.

7. (a) On obtient
$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

   (b) Enoncé particuliérement alambiqué pour dire que l'on écrit les coordonnées de u et v dans la base canonique...
   $Id(u) = u$ qui a pour coordoonées dans la base canonique $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ donc la premiere coloone de P est $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. La deuxième colonne s'obtient de la meme facon avec v. On obtient
$$P = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

   (c) $det(P) = 1 - 2 = -1 \neq 0$ donc P ets inversible et la la formule de l'inverse d'une matrice donne
$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

   (d) Tout calcul fait, on obtient
$$P^{-1}AP = D$$

   (e) On montre par récurrence que $A^n = PD^nP^{-1}$
   On obtient
$$A^n = -\begin{pmatrix} 1 - 2^{n+1} & 2 - 2^{n+1} \\ 1 - 2^n & -2 - 2^n \end{pmatrix}$$
   D'où
$$g^n(x, y) = -((1 - 2^{n+1})x + (2 - 2^{n+1})y, (1 - 2^n)x + (-2 - 2^{n+1})y)$$

8. On chercher $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $au + bv = (x, y)$ La résolution du systéme donne
$$a = -x - 2y \quad \text{et} \quad b = -x - y$$
   Par récurrence on obtient $g^n(u) = u$ et $g^n(v) = 2^n v$

   (b)
$$\begin{aligned} g^n(x, y) &= g^n(au + bv) \\ &= ag^n(u) + bg^n(v) \\ &= (-x - 2y)u + (-x - y)2^n v \\ &= ((-1 + 2^{n+1})x + (-2 + 2^{n+1})y, (-1 + 2^n)x + (2 + 2^{n+1})y \end{aligned}$$

   (c) On retrouve la matrice A^n trouvée dans la question 7c

1. Si f vérifie $(*)$, on a alors
$$f \circ (f - 3f) = -2Id_E$$
   Ou encore
$$f \circ \frac{-1}{2}(f - 3f) = \frac{-1}{2}(f - 3f) \circ f = Id_E$$
   Ainsi f est bijective et
$$f^{-1} = \frac{-1}{2}(f - 3f)$$

2. Si f est solution de $(*)$ de la forme λId on a

$$\lambda^2 Id = 3\lambda Id - 2Id$$

Soit

$$(\lambda^2 - 3\lambda + 2)Id = 0$$

Comme $Id \neq 0$ on obtient $(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = 0$ dont les solutions sont

$$\lambda = 1 \quad \text{et} \quad \lambda = 2$$

Ainsi les solutions de $(*)$ de la forme λId sont

$$f_1 = Id \quad \text{et} \quad f_2 = 2Id$$

1. (a) Si f vrifie $(*)$ on a alors en composant par f :

$$f^3 = 3f^2 - 2f$$

Or $f^2 = 3f - 2Id$ d'où

$$f^3 = 7f - 6Id$$

De même on obtient

$$f^4 = 15f - 14Id$$

(b) Par récurrence.

2. (a) Dans la récurrence précédente on obtient

$$a_{n+1} = 3a_n + b_n$$

et

$$b_{n+1} = -2a_n$$

D'où

$$a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n$$

C'est-à-dire

$$a_{n+1} - 3a_n + 2a_{n-1} = 0$$

(b) C'est une suite arithmético-géométrique. On étudie le polynome caractérisque $X^2 - 3x + 2$ de racines 1 et 2 On a donc

$$a_n = C_1 + 2^n C_2$$

où C_1 et C_2 sont deux réels à déterminer.
On a $f^0 = Id$ d'où $a_0 = 0$ et $f^0 = f$ d'où $a_1 = 1$
En résolvant le systeme on obteint $C_1 = -1 \quad C_2 = 1$ D'où

$$a_n = -1 + 2^n$$

et

$$b_n = -2a_{n-1} = 2 - 2^n$$