Correction - DS9

Exercice 1. Pour un entier naturel non nul n donné, on considère une urne contenant $2n$ boules numérotées et indiscernables au toucher :

- n boules numérotées 0
- et les n boules restantes numérotées de 1 à n.

On effectue au hasard et sans remise deux tirages successifs d'une boule dans cette urne. On note X le plus grand des deux numéros obtenus et Y le plus petit. Ce problème propose de calculer les espérances de X et Y.

Partie 1 : Préliminaires.

On note A le premier numéro tiré et B le deuxième.

1. Déterminer les univers images de A et B.
2. Déterminer $P(A=0)$.
3. Déterminer la loi de probabilité de A et en déduire que son espérance est égale à $\frac{n+1}{4}$.
4. Justifier brièvement que B a la même loi de probabilité que A et en déduire son espérance.
5. Exprimer la probabilité conditionnelle $P_{(A=a)}(B=b)$ en fonction de n en distinguant plusieurs cas [1] selon les différentes valeurs de $(a,b)\in\{0,1,\dots,n\}^2$.

Partie 2 : Calcul des espérances de X et Y.

1. Déterminer l'univers image X.
2. Calculer la probabilité de l'événement $(X=0)$.
3. On fixe un entier $k\in\{1,2,\dots,n\}$ pour cette question.
   (a) Soit E_k l'événement{ la premiere boule tirée vaut k et la seconde boule est inférieure à k}. Montrer que
   $$P(E_k)=P(A=k)\sum_{b=0}^{k-1}P_{(A=k)}(B=b)$$
   (b) Soit F_k l'événement { la seconde boule tirée vaut k et la première boule est inférieure à k}. Montrer que
   (c) En déduire que :
   $$P(F_k)=\sum_{a=0}^{k-1}P(A=a)P_{(A=a)}(B=k)$$
   (d) En utilisant les résultats du préliminaire et les deux questions précédentes, en déduire que $P(X=k)=\frac{n+k-1}{n(2n-1)}$.
4. Déduire des résultats précédents l'expression de l'espérance de X en fonction de n. (On rappelle que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$)

Correction 1. Partie 1

1. $A(\Omega)=B(\Omega)=[\![0,n]\!]$
2. Pour $k=0$ on obtient
$$P(A=0)=\frac{n}{2n}=\frac{1}{2}$$

1. on pourra distinguer 5 cas

3. $\forall k \in [\![1, n]\!]$ on obtient
$$P(A = k) = \frac{1}{2n}$$
On a alors
$$\begin{aligned} E(A) &= \sum_{k=0}^{n} kP(A = k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} k\frac{1}{2n} \\ &= \frac{1}{2n}\frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n+1}{4} \end{aligned}$$
4.
5. Comme proposer dans l'énoncé on va distinguer les différents cas.
<u>Cas $a = 0, b = 0$</u> Alors
$$P_{[A=a]}(B = b) = \frac{n-1}{2n-1}$$
<u>Cas $a = 0, b \neq 0$</u> Alors
$$P_{[A=a]}(B = b) = \frac{1}{2n-1}$$
<u>Cas $a \neq 0, b = 0$</u> Alors
$$P_{[A=a]}(B = b) = \frac{n}{2n-1}$$
<u>Cas $a \neq 0, b \neq 0, a = b$</u> Alors
$$P_{[A=a]}(B = b) = 0$$
<u>Cas $a \neq 0, b \neq 0, a \neq b$</u> Alors
$$P_{[A=a]}(B = b) = \frac{1}{2n-1}$$

Partie 2
1. $X(\Omega) = [\![1, n]\!]$
2.
$$\begin{aligned} P(X = 0) &= P(A = 0 \cap B = 0) \\ &= P_{[A=0]}P(B = 0)P(B = 0) \\ &= \frac{n-1}{2n-1}\frac{1}{2} \end{aligned}$$
3. On traduit tout d'abord l'événement E_k à l'aide des VAR A et B. On obtient :
$$E_k = [A = k] \cap \bigcup_{i=0}^{k-1} [B = i]$$
d'où
$$P(E_k) = P([A = k] \cap \bigcup_{i=0}^{k-1} [B = i])$$

Donc
$$P(E_k) = P_{[A=k]}(\bigcup_{i=0}^{k-1}[B=i]))P([A=k])$$
Or les événements $[B=i]$ sont disjoints donc
$$P_{[A=k]}(\bigcup_{i=0}^{k-1}[B=i]) = \sum_{i=0}^{k-1} P_{A=k}(B=i)$$
On obtient bien
$$P(E_k) = P(A=k)\sum_{i=0}^{k-1} P_{A=k}(B=i)$$

4. Soit F_k l'événement { la seconde boule tirée vaut k et la première boule est inférieure à k}
On a de même
$$F_k = [B=k] \cap \bigcup_{i=0}^{k-1}[A=i] = \bigcup_{i=0}^{k-1}[B=k]\cap[A=i]$$
d'où
$$P(F_k) = P(\bigcup_{i=0}^{k-1}[B=k]\cap[A=i])$$
Comme les événémentes $[B=k]\cap[A=i]$ sont disjoints on a alors
$$\begin{aligned} P(F_k) &= \sum_{i=0}^{k-1} P(B=k\cap A=i) \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} P_{A=i}(B=k)P(A=i) \end{aligned}$$

5. $P(X=k) = P(E_k \cup F_k)$ et donc
$$P(X=k) = P(A=k)\sum_{i=0}^{k-1} P_{A=k}(B=i) + \sum_{a=0}^{k-1} P(A=a)P_{(A=a)}(B=k)$$
En remplacant par les valeurs obtenues au I-5) on obtient
$$P(X=k) = \frac{1}{2n}\left(\frac{n}{2n-1} + \sum_{i=1}^{k-1}\frac{1}{2n-1}\right) + (P(A=0)P_{(A=0)}(B=k) + \sum_{a=1}^{k-1} P(A=a)P_{(A=a)}(B=k)$$
D'une part
$$\frac{1}{2n}\left(\frac{n}{2n-1} + \sum_{i=1}^{k-1}\frac{1}{2n-1}\right) = \frac{n+k-1}{2n(2n-1)}$$
D'autre part
$$\begin{aligned} P(A=0)P_{(A=0)}(B=k) + \sum_{a=1}^{k-1} P(A=a)P_{(A=a)}(B=k) &= \frac{1}{2}\frac{1}{2n-1} + \sum_{a=1}^{k-1}\frac{1}{2n}\frac{1}{2n-1} \\ &= \frac{n+k-1}{2n(2n-1)} \end{aligned}$$
D'où
$$P(X=k) = 2\frac{n+k-1}{2n(2n-1)} = \frac{n+k-1}{n(2n-1)}$$

6.

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=0}^{n} kP(X=k) \\ &= \frac{1}{n(2n-1)} \sum_{k=1}^{n} k(n+k-1) \\ &= \frac{1}{n(2n-1)}(n-1)\frac{n}{\text{ffl}} \end{aligned}$$

Exercice 2. On définit l'application :

$$g \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (-4x+3y, -6x+5y) \end{array} \right.$$

1. Montrer que g est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.
2. Donner la matrice de g, notée A, dans la base canonique.
3. Déterminer $F = \ker(g - 2\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2})$ et $G = \ker(g + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2})$ et donner une base de F et une base de G.
4. Montrer que $F \cap G = \{0\}$
5. Soit $u = (1,2)$ et $v = (1,1)$ Montrer que $B = (u,v)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
6. Donner la matrice de g, notée D, dans la base B
7. Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ Montrer que P est inversible et calculer $P^{-1}AP$.
8. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'expression de A^n.

Correction 2.

Un exemple

1. Soit $u = (x_1, y_1)$ et $v = (x_2, y_2)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} g(u+\lambda v) &= g((x_1,y_1) + \lambda(x_2,y_2)) \\ &= g((x_1 + \lambda x_2, y_1 + \lambda_2)) \\ &= (-4(x_1+\lambda x_2) + 3(y_1 + \lambda y_2), -6(x_1 + \lambda x_2) + 5(y_1 + \lambda y_2)) \\ &= (-4x_1 + 3y_1, -6x_1 + 5y_1) + \lambda(-4x_2 + 3y_2, -6x_2 + 5y_2) \\ &= g(x_1, y_1) + \lambda g(x_2, y_2) \\ &= g(u) + \lambda g(v) \end{aligned}$$

Ainsi g est linéaire. Comme l'espace de départ et d'arrivée de la fonction g est $\mathbb{R}^2$, g est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$

2. On obtient $A = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}$
3. $A - 2I_2 = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$ Soit $(x,y) \in F$ on a alors

$$\begin{pmatrix} -6 & 3 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

C'est-à-dire

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -6x + 3y & = & 0 \\ -6x + 3y & = & 0 \end{array} \right.$$

On obtient donc $y = 2x$ et

$$F = \{(x, 2x) | x \in \mathbb{R}\}$$

Autrement dit

$$F = \mathrm{Vect}((1,2))$$

De même $A + I_2 = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}$ Soit $(x,y) \in G$ on a alors

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -6 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

C'est-à-dire

$$\begin{cases} -3x+3y &= 0 \\ -6x-6y &= 0 \end{cases}$$

On obtient donc $x=y$ et

$$G=\{(y,y)|y\in\mathbb{R}\}$$

Autrement dit

$$G=\text{Vect}((1,1))$$

4. Soit $u\in F\cap G$, On a alors

$$(g+Id)(u)=(g-2Id)(u)=0$$

D'où

$$g(u)=-u \quad \text{et} \quad g(u)=2u$$

Finalement $-u=2u$ c'est-à-dire $u=(0,0)$
Ainsi

$$F\cap G=\{(0,0)\}$$

5. (u,v) forment une famille libre étant 2 vecteurs non propotionnels. Comme $\text{Card}(u,v)=2=\dim(R^2)$ c'est une base de $\mathbb{R}^2$
6. On obtient

$$D=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

7. $det(P)=1-2=-1\neq 0$ donc P est inversible et la la formule de l'inverse d'une matrice donne

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}$$

8. Tout calcul fait, on obtient

$$P^{-1}A=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4 & 3\\ -6 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$$

Puis

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-2 & 2\\ -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

9. On montre par récurrence que $A^n=PD^nP^{-1}$ et on sait d'apres le cours que

$$D^n=\begin{pmatrix}2^n & 0\\ 0 & (-1)^n\end{pmatrix}$$

et donc $A^n=PD^nP^{-1}$ donne

$$A^n=$$