DS9

Exercice 1. Pour un entier naturel non nul n donné, on considère une urne contenant $2n$ boules numérotées et indiscernables au toucher :

— n boules numérotées 0

— et les n boules restantes numérotées de 1 à n.

On effectue au hasard et sans remise deux tirages successifs d'une boule dans cette urne. On note X le plus grand des deux numéros obtenus et Y le plus petit. Ce problème propose de calculer les espérances de X et Y.

Partie 1 : Préliminaires.

On note A le premier numéro tiré et B le deuxième.

1. Déterminer les univers images de A et B.
2. Déterminer $P(A = 0)$.
3. Déterminer la loi de probabilité de A et en déduire que son espérance est égale à $\frac{n+1}{4}$.
4. Justifier brièvement que B a la même loi de probabilité que A et en déduire son espérance.
5. Exprimer la probabilité conditionnelle $P_{(A=a)}(B = b)$ en fonction de n en distinguant plusieurs cas [1] selon les différentes valeurs de $(a, b) \in \{0, 1, \ldots, n\}^2$.

Partie 2 : Calcul des espérances de X et Y.

1. Déterminer l'univers image X.
2. Calculer la probabilité de l'événement $(X = 0)$.
3. On fixe un entier $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ pour cette question.
   (a) Soit E_k l'événement{ la premiere boule tirée vaut k et la seconde boule est inférieure à k}. Montrer que
   $$P(E_k) = P(A = k)\sum_{b=0}^{k-1} P_{(A=k)}(B = b)$$
   (b) Soit F_k l'événement { la seconde boule tirée vaut k et la première boule est inférieure à k}. Montrer que
   (c) En déduire que :
   $$P(F_k) = \sum_{a=0}^{k-1} P(A = a)P_{(A=a)}(B = k)$$
   (d) En utilisant les résultats du préliminaire et les deux questions précédentes, en déduire que $P(X = k) = \frac{n+k-1}{n(2n-1)}$.
4. Déduire des résultats précédents l'expression de l'espérance de X en fonction de n. (On rappelle que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$)

1. on pourra distinguer 5 cas

Exercice 2. On définit l'application :

$$g \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (-4x+3y, -6x+5y) \end{array} \right.$$

1. Montrer que g est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.
2. Donner la matrice de g, notée A, dans la base canonique.
3. Déterminer $F = \ker(g - 2\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2})$ et $G = \ker(g + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2})$ et donner une base de F et une base de G.
4. Montrer que $F \cap G = \{0\}$
5. Soit $u = (1,2)$ et $v = (1,1)$ Montrer que $B = (u,v)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
6. Donner la matrice de g, notée D, dans la base B
7. Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ Montrer que P est inversible et calculer $P^{-1}AP$.
8. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'expression de A^n.