TD : Fonctions de plusieurs variables.

I Calcul de dérivées partielles

Exercice 1. Déterminer le domaine de définition et de dérivabilité des fonctions suivantes, puis calculer leur dérivées partielles. En déduire l'expression du gradient.

1. $f(x,y) = xe^{\cos(xy)}$
2. $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2-1}$
3. $f(x,y) = (x+y)\arctan\left(\frac{x+y}{x-y}\right)$
4. $f(x,y,z) = 2x^3 + 3x^2yz - 2z^5$
5. $f(x,y,z) = x^{y^z}$

Exercice 2. Soit f une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

1. Calculer les dérivées des fonctions définies par $\varphi(t) = f(\cos t, \sin t)$ et $\psi(t) = f(e^t, f(t,t))$.
2. Calculer les dérivées partielles des fonctions définies par $g(x,y) = f(x+y, x-y)$ et $h(x,y) = f(x^2, y^2)$.
3. Calculer les dérivées partielles de la fonction définie par $g(x,y) = \displaystyle\int_{2x}^{xy} f(t,t)dt$. Pour cela, on pourra introduire la fonction définie par $\varphi(t) = f(t,t)$, ainsi qu'une de ses primitives.

Exercice 3. Déterminer les dérivées partielles d'ordres 1 et 2 des fonctions suivantes, en précisant pour chacune le domaine de validité.

1. $f(x,y) = x\sin(xy)$
2. $f(x,y) = x^y + y^x$
3. $f(x,y,z) = \dfrac{\ln(x^2+y^2)}{z(z+1)}$

II Calcul d'extremum

Exercice 4. Déterminer les extremums des fonctions définies par :

1. $f(x,y) = x^2 + y^2 - x^3$
2. $g(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$

Exercice 5. On considère la fonction définie par $f(x,y) = x^3 + xy + y^3$.

1. Montrer que f admet deux points critiques.
2. Montrer que le point critique d'abscisse 0 n'est pas un extremum local de f.
3. Le but de cette question est de montrer que f admet en $\left(-\dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{3}\right)$ un maximum local. On considère pour cela la fonction définie par $g(x,y) = f\left(-\dfrac{1}{3}+h, -\dfrac{1}{3}+k\right)$.
   (a) Montrer que pour tout $(h,k) \in \mathbb{R}^2$, on a : $hk \leq \dfrac{h^2+k^2}{2}$.
   (b) En déduire que pour tout $(h,k) \in \mathbb{R}^2$, on a : $g(h,k) - g(0,0) \leq -h^2\left(\dfrac{1}{2} - h\right) - k^2\left(\dfrac{1}{2} - k\right)$.
   (c) En déduire que g admet un maximum local en $(0,0)$, puis que f admet un maximum local en $\left(-\dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{3}\right)$.
   (d) Ce maximum est-il global ?

III Utilisation des fonctions de plusieurs variables

Exercice 6. Le but de cet exercice est de déterminer l'ensemble des fonctions f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ telles que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 3\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - 2\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0.$$

On suppose que f est une solution. On pose alors :

$$g : \begin{pmatrix} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (u,v) & \mapsto & f(3u-v, -2u+v) \end{pmatrix}$$

1. Montrer que $\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2, \dfrac{\partial g}{\partial u}(u,v) = 0$, et en déduire qu'il existe une fonction ψ de $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telle que $\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2, g(u,v) = \psi(v)$.
2. Montrer que l'application $\varphi : \begin{pmatrix} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (u,v) & \mapsto & (3u-v, -2u+v) \end{pmatrix}$ est bijective, et déterminer sa bijection réciproque.
3. Exprimer f en fonction de ψ et conclure.