

# TD - Logique et Ensemble

## I Raisonnements : implication, équivalence

**Exercice 1.** Compléter les pointillés par le connecteur logique  $\Leftrightarrow$ ,  $\Rightarrow$  ou  $\Leftarrow$  en justifiant votre choix.

1.  $x \in \mathbb{R}, x^2 = 4 \dots x = 2$ .
2.  $z \in \mathbb{C}, z = -\bar{z} \dots z \in i\mathbb{R}$ .
3.  $x \in \mathbb{R}, x = \frac{\pi}{2} \dots e^{4ix} = 1$ .

**Exercice 2.** On considère les deux propositions suivantes : A : «  $m$  et  $n$  sont deux entiers pairs », et B : «  $m + n$  est un entier pair ». A-t-on  $A \Rightarrow B$ ?  $B \Rightarrow A$ ?  $A \Leftrightarrow B$ ?

**Exercice 3.** Soit  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Démontrer l'équivalence suivante :  $(x^2 + y^2 = 0) \Leftrightarrow (x = 0 \text{ et } y = 0)$ .

**Exercice 4.** Montrer que si  $x$  et  $y$  sont deux réels qui vérifient  $x + y > 2$ , alors au moins un des deux est strictement supérieur à 1.

**Exercice 5.** Soit  $x \in \mathbb{R}^+$ . Montrer que la propriété suivante est vraie :  $P : (\forall \varepsilon > 0, x \leq \varepsilon) \Rightarrow x = 0$ .

## II Logique et quantificateurs

**Exercice 6.** Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses? Donner leur négation.

1.  $\forall x \in \mathbb{R}, x \geq 0$ .
2.  $\exists y \in \mathbb{R}, y \geq 0$ .
3.  $\forall x \in \mathbb{R}^+, \exists y \in \mathbb{R}, x = y^2$ .
4.  $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^+, x = y^2$ .
5.  $\exists x \in \mathbb{R}^+, \forall y \in \mathbb{R}, x = y^2$ .
6.  $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y > 0$ .
7.  $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y > 0$ .
8.  $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y > 0$ .

**Exercice 7.** Soit  $(f, g)$  deux fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . Écrire à l'aide des quantificateurs les énoncés suivants puis les nier.

1. L'application  $f$  est croissante.
2. Il existe un réel positif  $x$  tel que  $f(x) \geq 0$ .
3. La fonction  $f$  est paire.
4. La fonction  $f$  ne s'annule jamais.
5. La fonction  $f$  est inférieure à la fonction  $g$ .
6. La fonction  $f$  est périodique.

**Exercice 8.** Soit  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Écrire les négations des propositions suivantes :

1.  $1 \leq x < y$ .
2.  $(x^2 = 1) \implies x = 1$ .
3.  $\forall x \in E, \forall x' \in E, (x \neq x') \implies f(x) \neq f(x')$ .

### III Ensembles

---

**Exercice 9.** 1. Donner deux écritures de l'ensemble des complexes de partie réelle positive.

2. Montrer que  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 2x + y = 1\} = \{(x, 1 - 2x), x \in \mathbb{R}\}$ . Représenter graphiquement cet ensemble.

**Exercice 10.** Soit  $E$  un ensemble. Pour tous sous-ensembles  $A$  et  $B$  de  $E$ , on définit la différence symétrique de  $A$  et  $B$  par

$$A\Delta B = (A \cup B) - (A \cap B).$$

Montrer que :  $A\Delta B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})$ .

**Exercice 11.** Soient  $A$  et  $B$  deux sous-ensembles d'un ensemble  $E$ . Montrer que

$$A = B \Leftrightarrow A \cup B = A \cap B.$$

**Exercice 12.** Soit  $E$  un ensemble. Montrer par contraposition l'assertion suivante :

$$\forall A, B, C \in \mathcal{P}(E), \quad (A \cap B = A \cap C \text{ et } A \cup B = A \cup C) \Rightarrow B = C.$$

**Exercice 13.** Soient  $A$ ,  $B$  et  $C$  trois sous-ensembles d'un ensemble  $E$ . Montrer que :

$$(A \cup B = A \cap C) \Leftrightarrow B \subset A \subset C.$$

**Exercice 14.** On considère les sous-ensembles suivants de  $\mathbb{R}^2$  :

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x - y = 2\} \quad \text{et} \quad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, (3x + y + 2)(x + 2y + 4) \geq 0\}.$$

Représenter graphiquement  $A$  et  $B$  et montrer que  $A \subset B$ . A-t-on égalité ?

**Exercice 15.** 1. Soit  $E = \{1\}$ . Déterminer  $\mathcal{P}(E)$  puis  $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$ .

2. Déterminer  $\mathcal{P}(E)$  pour  $E = \{a, b, c, d\}$  avec  $a, b, c, d$  deux à deux distincts.

3. Déterminer  $\mathcal{P}(E)$  puis  $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$  pour un ensemble à deux éléments.