TD Dérivation : correction

I Calculs de dérivées

Correction 1. Avec des polynômes.

1. $f(x) = \dfrac{x-1}{x+2}$
   La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$. On obtient : $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-2\}, \quad f'(x) = \dfrac{3}{(x+2)^2}$.
2. $f(x) = \dfrac{1}{x^n}$, $n \in \mathbb{N}^\star$
   La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^\star$ et on obtient : $\forall x \in \mathbb{R}^\star, \quad f'(x) = \dfrac{-n}{x^{1+n}}$.
3. $f(x) = \dfrac{15x^4 - 30x^3 + 40x^2 - 20x + 7}{(x-1)^5}$
   La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et on obtient : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad f'(x) = \dfrac{-15(x^4 + 2x^2 + 1)}{(x-1)^6}$.
4. $f(x) = \left(\dfrac{3+x}{2x+1}\right)^4$
   La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{-\frac{1}{2}\}$ et on obtient : $\forall x \neq -\frac{1}{2}, \quad f'(x) = \dfrac{-20(3+x)^3}{(2x+1)^5}$.
5. $f(x) = (4-3x)^5$
   - ⋆ Domaine de définition : La fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
   - ⋆ Domaine de dérivabilité : La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme, composée et produit de fonctions dérivables.
   - ⋆ Expression de la dérivée : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -15(4-3x)^4$.
6. $f(x) = \dfrac{(4x-3)^3}{3x^2+1}$
   - ⋆ Domaine de définition : La fonction f est bien définie si $3x^2 + 1 \neq 0$ ce qui est toujours vrai comme somme de deux termes positifs dont l'un est strictemlent positif. Ainsi $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
   - ⋆ Domaine de dérivabilité : La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme, produit, composée et quotient de fonctions dérivables.
   - ⋆ Expression de la dérivée : pour tout $x \in \mathcal{D}_{f'}$, $f'(x) = \dfrac{6(2x^2+3x+2)(4x-3)^2}{(3x^2+1)^2}$.

Correction 2. Avec des racines et valeurs absolues.

1. $f(x) = \sqrt{2x^2 - 3x + 1}$
   La fonction f est définie sur $]-\infty, \frac{1}{2}] \cup [1, +\infty[$ et dérivable sur $]-\infty, \frac{1}{2}[\cup]1, +\infty[$ et on obtient : $\forall x \in]-\infty, \frac{1}{2}[\cup]1, +\infty[, \quad f'(x) = \dfrac{4x-3}{2\sqrt{2x^2-3x+1}}$.
2. $f(x) = x^n\sqrt{1-x}$, $n \in \mathbb{N}^\star$
   La fonction f est définie sur $]-\infty, 1]$ et dérivable sur $]-\infty, 1[$ et on obtient : $\forall x < 1, \quad f'(x) = \dfrac{x^{n-1}\left(x(-2n-1) + 2n\right)}{2\sqrt{1-x}}$.

3. $f(x) = x\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$
La fonction f est définie sur $]-1,1]$ et elle est dérivable sur $]-1,1[$ et on obtient : $\forall x \in]-1,1[, \quad f'(x) = \dfrac{-x^2-x+1}{\sqrt{1-x^2}(1+x)}$.
4. $f(x) = (\sqrt{x}+2x)^2$
La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^+$ et elle est dérivable sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et on obtient :
$\forall x > 0, \quad f'(x) = \dfrac{(2x+\sqrt{x})(1+4\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$.
5. $f(x) = \sqrt{4x^2-1}$
   - $\star$ Domaine de définition : La fonction f est bien définie si $4x^2-1 \geq 0$ et ainsi $\mathcal{D}_f = \left]-\infty, -\dfrac{1}{2}\right] \cup \left[\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$.
   - $\star$ Domaine de dérivabilité : La fonction f est dérivable sur $\left]-\infty, -\dfrac{1}{2}\right[\cup \left]\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$ comme somme, produit et composée de fonctions dérivables car f est dérivable si $4x^2-1 > 0$.
   - $\star$ Expression de la dérivée : pour tout $x \in \mathcal{D}_{f'}$, $f'(x) = \dfrac{4x}{\sqrt{4x^2-1}}$.
6. $f(x) = x|x|$
   - $\star$ Domaine de définition : La fonction f est bien définie sur $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
   - $\star$ Domaine de dérivabilité : La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^\star$ comme composée et produit de fonctions dérivables car $x \neq 0$ afin que la valeur absolue soit dérivable.
   - $\star$ Expression de la dérivée : pour tout $x \in \mathcal{D}_{f'}$, $f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x < 0 \\ 2x & \text{si } x > 0 \end{cases}$ car $f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x > 0 \\ x^2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

Correction 3. Avec des exponentielles et logarithmes.

1. $f(x) = x^x = e^{x\ln x}$
La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et on obtient : $\forall x > 0, \quad f'(x) = x^x(\ln x + 1)$.
2. $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$
La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et on obtient : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = -xe^{\frac{-x^2}{2}}$.
3. $f(x) = \ln|x|$
La fonction f est définie et dérivble sur $\mathbb{R}^\star$. Comme il y a une valeur absolue, on étudie des cas :
   - $\star$ Si $x > 0$, alors $f(x) = \ln(x)$ et $f'(x) = \dfrac{1}{x}$.
   - $\star$ Si $x < 0$, alors $f(x) = \ln(-x)$ et $f'(x) = \dfrac{-1}{-x} = \dfrac{1}{x}$.

   Ainsi, dans tous les cas, sur $\mathbb{R}^\star$, on obtient que : $f'(x) = \dfrac{1}{x}$.
4. $f(x) = \ln|(x^2+1)^3|$
Comme $1 + x^2 > 0$, la fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et la valeur absolue est inutile. Ainsi, on a : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \ln(x^2+1)^3$ et $f'(x) = \dfrac{6x}{1+x^2}$.
5. $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^x-1}{x^x+1}\right)$
La fonction f est définie et dérivable sur $]1, +\infty[$ et on obtient : $\forall x > 1, \quad f'(x) = \dfrac{2x^x(1+\ln x)}{(x^x-1)(x^x+1)}$.

6. $f(x) = \dfrac{1}{\ln(x)}$

   ⋆ Domaine de définition : La fonction f est bien définie si $x > 0$ et $\ln x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$. Ainsi $\mathcal{D}_f =]0,1[\cup]1,+\infty[$.

   ⋆ Domaine de dérivabilité : La fonction f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ comme quotient de fonctions dérivables.

   ⋆ Expression de la dérivée : pour tout $x \in \mathcal{D}_{f'}$, $f'(x) = \dfrac{-1}{x(\ln(x))^2}$.

7. $f(x) = \ln(\ln x)$

   ⋆ Domaine de définition : La fonction f est bien définie si $x > 0$ et $\ln(x) > 0$. Ainsi $\mathcal{D}_f =]1,+\infty[$.

   ⋆ Domaine de dérivabilité : La fonction f est dérivable sur $]1,+\infty[$ comme composée de fonctions dérivables.

   ⋆ Expression de la dérivée : pour tout $x \in \mathcal{D}_{f'}$, $f'(x) = \dfrac{1}{x\ln(x)}$.

8. $f(x) = |\ln(x)|$

   ⋆ Domaine de définition : La fonction f est bien définie si $x > 0$ et $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^{+\star}$.

   ⋆ Domaine de dérivabilité : La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+\star} \setminus \{1\}$ comme composée de fonctions dérivables et car $\ln x \neq 0$ pour que la valeur absolue soit bien dérivable.

   ⋆ Expression de la dérivée : pour tout $x \in \mathcal{D}_{f'}$, $f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{x} & \text{si } x \in]0,1[\\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x \in]1,+\infty[\end{cases}$ car $f(x) = \begin{cases} -\ln(x) & \text{si } x \in]0,1] \\ \ln(x) & \text{si } x \in]1,+\infty[\end{cases}$.

Correction 4. Avec des fonctions trigonométriques.

1. $f(x) = \tan\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$

   La fonction f est définie et dérivable si x vérifie : $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\dfrac{2x}{1+x^2} \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$. On obtient alors sur cet ensemble : $f'(x) = \dfrac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}\left(1+\tan^2\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)\right)$.

2. $f(x) = \cos^4 x$

   La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et on obtient : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = -4\sin(x)\cos^3(x)$.

3. $f(x) = (\sin(x))e^{\cos x}$

   ⋆ Domaine de définition : La fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

   ⋆ Domaine de dérivabilité : La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée et produit de fonctions dérivables.

   ⋆ Expression de la dérivée : pour tout $x \in \mathcal{D}_{f'}$, $f'(x) = \left(\cos(x) - \sin^2(x)\right)e^{\cos x}$.

4. $f(x) = \sin(\sin(\sin x))$

   ⋆ Domaine de définition : La fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

   ⋆ Domaine de dérivabilité : La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables.

- ⋆ Expression de la dérivée : pour tout $x \in \mathcal{D}_{f'}$, $f'(x) = \cos(x) \times \cos(\sin(x)) \times \cos(\sin(\sin x))$.

5. $f(x) = \cos(\sqrt{x})$

   - ⋆ Domaine de définition : La fonction f est bien définie si $x \geq 0$ et $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^+$.
   - ⋆ Domaine de dérivabilité : La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+\star}$ comme composée de fonctions dérivables car $x > 0$ afin que la racine carrée soit bien dérivable.
   - ⋆ Expression de la dérivée : pour tout $x \in \mathcal{D}_{f'}$, $f'(x) = \dfrac{-\sin(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$.

Correction 5. La fonction f est définie et dérivable sur $]-a, a[$. Le calcul de sa dérivée donne :

$$f'(x) = a^{\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}} \times \frac{x \ln a}{(a^2 - x^2)\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Correction 6. **Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ fixé, et soit f une fonction définie au voisinage de x_0 et dérivable en x_0.**

On reconnaît un taux d'accroissement : $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{(x_0+h) - x_0} = \boxed{f'(x_0)}$ car f est dérivable en x_0. (On peut détailler en posant par exemple le changement de variable $X = x - x_0$).
On fait apparaître deux taux d'accroissement :

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{h} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0) + f(x_0) - f(x_0-h)}{h} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{(x_0+h) - x_0} + \frac{f(x_0) - f(x_0-h)}{x_0 - (x_0-h)}.$$

Or f est dérivable en x_0 donc $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{(x_0+h) - x_0} = f'(x_0)$ et $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0) - f(x_0-h)}{x_0 - (x_0-h)} = f'(x_0)$.

On en déduit que $\boxed{\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{h} = 2f'(x_0)}$.

II Étude de la régularité d'une fonction

Correction 7.

- La fonction f est de classe C^1 sur $]-1, 0[\cup]0, 1[$ comme composée, somme et quotient dont le dénominateur ne s'annule pas de fonction C^1.
- Étude de la continuité en 0, point particulier :
  On doit vérifier que la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0, $x \neq 0$ est bien égale à $f(0) = 0$. Soit $x \neq 0$, $x \in]-1, 0[\cup]0, 1[$, on a en utilisant la quantité conjuguée (la forme est sous cette forme indéterminée en 0)

  $$f(x) = \frac{1 + x^2 - (1 - x^2)}{x\left(\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}\right)} = \frac{2x}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}}.$$

  On a ainsi levé l'indétermination et on obtient par somme et quotient de limites : $\displaystyle\lim_{x\to 0,\ x\neq 0} f(x) = 0$. Ainsi la fonction est bien continue en 0 et ainsi f est continue sur $]-1, 1[$.
- Montrons que la fonction est dérivable en 0. Pour cela, on revient au calcul du taux d'accroissement. On a :

  $$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}{x^2} = \frac{2x}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}}$$

  d'après le calcul précédent. On en déduit que $\displaystyle\lim_{x\to 0} = 1$, donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 1$.

- Montrons que la fonction f' est continue en 0. Pour cela, il faut calculer $f'(x)$ pour $x \neq 0$, et calculer sa limite en 0. On a pour tout $x \in]-1,1[\setminus\{0\}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)-\left(\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}\right)}{x^2} \\ &= \frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{x^2\sqrt{1-x^2}\sqrt{1+x^2}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1+x^2}\left(\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1+x^2}\right)}. \end{aligned}$$

La dérivée n'est pas sous forme indéterminée en 0 et on obtient par somme, composée, produit et quotient de limite : $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = 1 = f'(0)$. On en déduit que f' est continue en 0, donc finalement que f est C^1 en 0.
- La fonction f est C^1 en 0 et elle est C^1 sur $]-1,0[\cup]0,1[$, donc elle est bien C^1 sur $]-1,1[$.

Correction 8.

1.
   - Domaine de définition : La fonction f est bien définie si et seulement si $1-e^{-3x} \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$. Ainsi $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^\star$.
   - Limite aux bornes :
     - ⋆ Limite en $-\infty$: Par croissance comparée : $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^x = 0$. Puis par propriété sur les somme, composée et quotient de limites, on obtient que : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$. La courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ au voisinage de $-\infty$.
     - ⋆ Limite en $+\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ par propriété sur les somme, produit, composée et quotient de limites. De même : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$. Et ainsi la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une branche parabolique de direction asymptotique l'axe des ordonnées.
     - ⋆ Limite en 0 : On utilise l'équivalent usuel de l'exponentielle et on obtient que : $1-e^{-3x} \underset{0}{\sim} 3x$. Ainsi par quotient d'équivalent, on a : $f(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{x}{3}$ car $e^x \underset{0}{\sim} 1$. Ainsi : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.
   - Étude de la continuité : la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^\star$ comme produit, composée, somme et quotient de fonctions continues.
   - Prolongement par continuité en 0 : on a montré que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$, donc la fonction f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$. Et en notant toujours f la nouvelle fonction ainsi obtenue, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2e^x}{1-e^{-3x}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

2. Étude de la dérivabilité : La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^\star$ comme produit, composée, somme et quotient de fonctions dérivables.
   Étude de la dérivabilité en 0 : On a pour tout $x \neq 0$: $\dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \dfrac{xe^x}{1-e^{-3x}}$. Toujours en utilisant l'équivalent usuel de la fonction exponentielle, on a : $\dfrac{f(x)-f(0)}{x} \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{3}$. Ainsi on obtient que : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \dfrac{1}{3}$. Ainsi la fonction f est dérivable en 0 et $f'(0) = \dfrac{1}{3}$.
   On a donc que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Correction 9.

1.
   - Domaine de définition : La fonction g est toujours bien définie et ainsi on a : $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}$.
   - Limite aux bornes :

- $\star$ Limite en $+\infty$: Pour tout $x>0$, on a : $g(x)=x^{\frac{3}{2}}\ln x$. Ainsi, par propriété sur le produit de limites, on a : $\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$. De même : $\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x}=+\infty$. Ainsi la courbe $\mathcal{C}_g$ admet une branche parabolique de direction asymptotique l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.
- $\star$ Limite en $-\infty$: Pour tout $x<0$: $g(x)=e^{\frac{1}{x}}$. Ainsi par propriété sur la composée de limite, on a : $\lim_{x\to-\infty} g(x)=1$. Ainsi la courbe $\mathcal{C}_g$ admet une asymptote horizontale d'équation $y=1$ au voisinage de $-\infty$.

2. • Étude de la continuité :
La fonction g est continue sur $\mathbb{R}^{+\star}$ comme produit de fonctions continues. Elle est aussi continue sur $\mathbb{R}^{-\star}$ comme composée de fonctions continues. Il reste donc à étudier la continuité en 0 :
$\lim_{x\to0^-} g(x)=\lim_{x\to0^-} e^{\frac{1}{x}}=0$ par propriété sur la composition de limite.
$\lim_{x\to0^+} g(x)=\lim_{x\to0^+} x^{\frac{3}{2}}\ln x=0$ par croissance comparée.
Ainsi, on a : $\lim_{x\to0^-} g(x)=\lim_{x\to0^+} g(x)=g(0)$ donc la fonction g est aussi continue en 0.
Ainsi la fonction g est continue sur $\mathbb{R}$.
• Étude de la dérivabilité :
La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}^{+\star}$ comme produit de fonctions dérivables. Elle est aussi dérivable sur $\mathbb{R}^{-\star}$ comme composée de fonctions dérivables. Il reste donc à étudier la dérivabilité en 0 :
Pour tout $x<0$, on a : $\frac{g(x)-g(0)}{x}=\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}=Xe^X$ en posant $X=\frac{1}{x}$. Comme $\lim_{x\to0^-} X=-\infty$, on a par croissance comparée : $\lim_{X\to-\infty} Xe^X=0$. Et ainsi, on obtient que : $\lim_{x\to0^-}\frac{g(x)-g(0)}{x}=0$. Ainsi la fonction g est dérivable à gauche en 0 et $g'_g(0)=0$.
Pour tout $x>0$, on a : $\frac{g(x)-g(0)}{x}=\sqrt{x}\ln x$. Ainsi par croissance comparée : $\lim_{x\to0^+}\frac{g(x)-g(0)}{x}=0$. Et ainsi, on obtient que : $\lim_{x\to0^+}\frac{g(x)-g(0)}{x}=0$. Ainsi la fonction g est dérivable à droite en 0 et $g'_d(0)=0$.
La fonction g est dérivable à gauche et à droite en 0 avec $g'_d(0)=0=g'_g(0)$. Donc la fonction g est dérivable en 0 et $g'(0)=0$.
Ainsi la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Correction 10.

1. La fonction f est bien définie si et seulement si : $\ln(x-2)\neq0$ pour tout $x>2$. Or on a : $\ln(x-2)=0\Leftrightarrow x=3$. Ainsi $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}^+\setminus\{3\}$.
2. • Limites aux bornes
   - $\star$ Limite au point de raccord 2 : Par continuité de la fonction $x\mapsto e^{x^2-3x+2}$ qui est bien continue sur $[0,2]$ comme somme et composée de fonctions continues, on a : $\lim_{x\to2^-} f(x)=f(2)=1$. De plus, pour tout $x>2$, on a : $f(x)=x-1-\frac{1}{\ln(x-2)}$. Et par propriétés sur les sommes, composée et quotient de limites, on obtient que : $\lim_{x\to2^+} f(x)=1$. Ainsi, on a : $\lim_{x\to2^-} f(x)=f(2)=1=\lim_{x\to2^+} f(x)$. Ainsi la fonction f est bien continue en 2.
   - $\star$ Limite en 3 : Par propriété sur les sommes, composée et quotient de limites, on obtient que : $\lim_{x\to3^-} f(x)=+\infty$ et $\lim_{x\to3^+} f(x)=-\infty$. Ainsi la courbe $\mathcal{C}_g$ admet une asymptote verticale d'équation $x=3$.
   - $\star$ Limite en $+\infty$: pour tout $x>2$, $f(x)=x-1-\frac{1}{\ln(x-2)}$. Ainsi par propriété sur les sommes, composée et quotient de limites, on obtient que : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$. On peut

alors étudier la branche infinie. On a : $\lim_{x\to+\infty} f(x)-(x-1) = \lim_{x\to+\infty} -\dfrac{1}{\ln(x-2)} = 0$ par propriété sur les somme, composée et quotient de limites. Ainsi la courbe $\mathcal{C}_f$ admet la droite $y = x-1$ comme asymptote oblique au voisinage de $+\infty$.

- Étude de la continuité de f :
  La fonction f est continue sur $[0,2[$ comme somme et composée de fonctions continues. La fonction f est continue sur $]2,+\infty[\backslash\{3\}$ comme sommes, composée et quotient de fonctions continues. De plus, on a montré que la fonction f est aussi continue en 2. Ainsi la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^+ \setminus \{3\}$.
- La fonction f est dérivable sur $[0,2[$ comme somme et composée de fonctions dérivables. La fonction f est dérivable sur $]2,+\infty[\backslash\{3\}$ comme sommes, composée et quotient de fonctions dérivables. Étudions la dérivabilité en 2 :
  - $\star$ La fonction f est dérivable sur $[0,2]$ comme somme et composée de fonctions dérivables. Ainsi elle est dérivable à gauche en 2 et $f_g'(2) = (4-3)\times e^0 = 1$.
  - $\star$ Étude de la dérivabilité à droite en 2 : pour tout $x > 2$, on a : $\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = 1 - \dfrac{1}{(x-2)\ln(x-2)}$. En posant $X = x-2$, on a par croissance comparée que : $\lim_{X\to 0^+} X\ln X = 0^+$. Ainsi par propriété sur les composée, quotient et somme de limites, on obtient que : $\lim_{x\to 2^+} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = -\infty$. Ainsi la fonction f ,n'est pas dérivable à droite en 2 et elle n'est donc pas dérivable en 2. De plus le point d'abscisse 2 est un point anguleux avec à droite une demi-tangente verticale.

  Ainsi la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^+ \setminus \{2,3\}$.

3. - On vient de voir que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^+ \setminus \{2,3\}$. Le calcul donne pour tout $x > 0$, $x \neq 2$ et $x \neq 3$: $f'(x) = \begin{cases} (2x-3)e^{x^2-3x+2} & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ \sqrt{x}\left(\dfrac{3}{2}\ln x + 1\right) & \text{si } x > 2. \end{cases}$ Pour tout $x > 2$: $f'(x) > 0$ comme somme de deux termes strictements positifs car $\ln x > 0$ car $x > 2$ et comme produit de deux termes strictement positifs. Il reste à étudier le signe de f' sur $[0,2[$. Comme une exponentielle est toujours strictement positive, le signe de f' ne dépend donc que du signe de $2x-3$. On obtient ainsi le tableau de variation suivant :

x	0		$\frac{3}{2}$		2		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	$+$	‖	$+$	
f	e^2	↘	$e^{-\frac{1}{4}}$	↗		↗	$+\infty$

   - À faire.
4. On a
   - La fonction f est continue sur $[\frac{3}{2},2]$ comme somme et composée de fonctions continues.
   - La fonction f est strictement croissante sur $[\frac{3}{2},2]$
   - $f(\frac{3}{2}) = e^{-\frac{1}{4}}$ et $f(2) = 1$

   Ainsi d'après le théorème de la bijection, la fonction f est bijective de $[\frac{3}{2},2]$ sur $[e^{-\frac{1}{4}},1]$.
5. - On a : $f^{-1} : [e^{-\frac{1}{4}},1] \to [\frac{3}{2},2]$.
   - La fonction f^{-1} est continue sur $[e^{-\frac{1}{4}},1]$ comme bijection réciproque d'une fonction continue.

- Tableau de variation :

x	$e^{-\frac{1}{4}}$		1
f^{-1}	$\frac{3}{2}$	$\nearrow$	2

- Étude de la dérivabilité de f^{-1} : Pour cela on va utiliser le théorème de la dérivabilité d'une fonction réciproque et il faut donc commencer par regarder les points d'annulation de f'. Or on a sur $[\frac{3}{2}, 2]$: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{2}$. De plus on a : $f(\frac{3}{2}) = e^{-\frac{1}{4}}$. Ainsi, on a
  - ⋆ La fonction f est dérivable sur $]\frac{3}{2}, 2]$ comme somme et composée de fonctions dérivables.
  - ⋆ Pour tout $x \in]\frac{3}{2}, 2]$: $f'(x) \neq 0$.

  Ainsi d'après le théorème de dérivabilité d'une fonction réciproque, f^{-1} est dérivable sur $]e^{-\frac{1}{4}}, 1]$.
- À faire.

6. Comme on a déjà montré que la fonction f est bijective de $[\frac{3}{2}, 2]$ sur $[e^{-\frac{1}{4}}, 1]$, on sait que :

$$\forall x \in [\frac{3}{2}, 2], \forall y \in [e^{-\frac{1}{4}}, 1] : y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y).$$

Or on a : $y = f(x) \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 - \ln y = 0$ car la fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+\star}$. Ainsi, on doit résoudre une équation du second degré en x. On a $\Delta = 1 + 4\ln y$. Or $y \in [e^{-\frac{1}{4}}, 1]$ donc $0 \leq \Delta \leq 1$ et en particulier il existe deux solutions qui sont : $x_1 = \dfrac{3 + \sqrt{1 + 4\ln y}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{3 - \sqrt{1 + 4\ln y}}{2}$. Mais comme $x \in [\frac{3}{2}, 2]$ et que $0 \leq \Delta \leq 1$, on a que $\dfrac{3}{2} \leq x_1 \leq 2$ et $1 \leq x_2 \leq \dfrac{3}{2}$. Ainsi seule la solution x_1 convient. Ainsi, on vient de montrer que : $y = f(x) \Leftrightarrow x = \dfrac{3 + \sqrt{1 + 4\ln y}}{2}$. Et ainsi, on a pour tout $y \in [e^{-\frac{1}{4}}, 1]$: $f^{-1}(y) = \dfrac{3 + \sqrt{1 + 4\ln y}}{2}$.

III Utilisation des théorèmes liés à la dérivation

Correction 11. Théorème de Rolle :
Ici l'idée est de voir que grâce au théorème de Rolle appliqué entre chacun des zéros, on arrive à trouver un zéro de moins à chaque dérivée de la fonction. On raisonne par récurrence : montrons par récurrence sur $k \in \{0, \dots, n\}$ la propriété P_k : $f^{(k)}$ s'annule au moins $n + 1 - k$ fois.

- Initialisation : par hypothèse, $f^{(0)} = f$ s'annule $n + 1 - 0$ fois donc P_0 est vraie.
- Hérédité : soit $k \in \{0, \dots, n-1\}$ fixé, on suppose P_k vraie, montrons P_{k+1} vraie. Par hypothès de récurrence, $f^{(k)}$ s'annule $n + 1 - k$ fois : on note $x_0, x_1, \dots, x_{n+1-k}$ les zéros distincts de $f^{(k)}$ sur $]a, b[$ dans l'ordre croissant $x_0 < x_1 < \dots < x_{n+1-k}$. Pour tout $i \in \{0, \dots, n-k\}$, on note I_i l'intervalle $I_i = [x_i, x_{i+1}]$. D'après le hypothèses énoncées sur f, on sait que, pour tout $i \in \{0, \dots, n-k\}$, on a :
  - ⋆ $f^{(k)}$ est continue sur $I_i = [x_i, x_{i+1}]$
  - ⋆ $f^{(k)}$ est dérivable sur $]x_i, x_{i+1}[$
  - ⋆ $f(x_i) = f(x_{i+1})$ (et cela vaut 0)

  Ainsi, d'après le théorème de Rolle appliqué à la fonction $f^{(k)}$ sur l'intervalle I_i, on sait qu'il existe $c_i \in]x_i, x_{i+1}[$ tel que $(f^{(k)})'(c_i) = f^{(k+1)}(c_i) = 0$. Comme le théorème s'applique à tous les intervalles I_i avec $i \in \{0, \dots n-k\}$ et que tous ces intervalles sont disjoints, on obtient que la fonction $f^{(k+1)}$ admet $n - k = n + 1 - (k+1)$ zéros distincts dans l'intervalle $]a, b[$. Donc P_{k+1} est vraie.

Ainsi on a montré que P_k est vraie pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, en particulier P_n est vraie, et on a bien montré que la fonction $f^{(n)}$ admet un zéro.

Correction 12. Supposons que P soit un polynôme de degré n. Comme toutes ses racines sont réelles et simples, on sait qu'il existe $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ tel que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$: $P(x_i) = 0$. Il s'agit alors d'appliquer le théorème de Rolle sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$. Faisons le par exemple pour $[x_1, x_2]$:

- La fonction P est continue sur $[x_1, x_2]$ comme fonction polynôme.
- La fonction P est dérivable sur $]x_1, x_2[$ comme fonction polynôme.

Ainsi d'après le théorème de Rolle, on sait qu'il existe $y_1 \in]x_1, x_2[$ tel que $P'(y_1) = 0$. Ainsi on a trouvé une racine réelle de P'. En itérant le raisonnement sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, on trouve ainsi : $y_1 < y_2 < \cdots < y_{n-1}$ racines réelles de P'. Ainsi on a trouvé $n-1$ racines réelles dinstinctes de P'. Or comme $\deg P = n$, on a $\deg P' = n - 1$ et on a donc trouvé toutes les racines de P'. Ainsi les racines de P' sont bien toutes réelles et simples.

Correction 13. On pose la fonction $f(x) = x^n + px + q$ et on étudie les zéros de f.

- Cas 1 : n est pair :
  On suppose par l'absurde que f admet au moins trois racines distinctes sur $\mathbb{R}$. Soit par exemple a, b et c trois de ses racines distinctes avec $a < b < c$. On applique alors le théorème de Rolle à la fonction f sur les intervalles $[a, b]$ et $[b, c]$. En effet, on a :
  - ⋆ la fonction f est continue sur $[a, b]$ (respectivement sur $[b, c]$) comme fonction polynôme
  - ⋆ la fonction f est dérivable sur $]a, b[$ (respectivement sur $]b, c[$) comme fonction polynôme
  - ⋆ $f(a) = f(b)$ (respectivement $f(b) = f(c)$)

  Ainsi, d'après le théorème de Rolle appliqué à la fonction f sur l'intervalle $[a, b]$ puis $[b, c]$, on sait qu'il existe $A \in]a, b[$ et $C \in]b, c[$ tel que $f'(A) = 0 = f'(C)$. Ainsi, on vient de montrer que si f a au moins trois zéros alors f' a au moins deux zéros. Or, on a
  $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = nx^{n-1} + p.$$
  Ainsi, on a
  $$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^{n-1} = -\frac{p}{n}.$$
  Or, si n est pair alors $n-1$ est impair. De plus, la fonction $x \mapsto x^{n-1}$ avec $n-1$ impair est bijective sur $\mathbb{R}$ tout entier donc l'équation $x^{n-1} = -\frac{p}{n}$ admet une unique solution. Ainsi, f' ne peut pas avoir au moins deux zéros. Contradiction. Ainsi, on a bien montré que f a au plus deux racines.
- Cas 2 : n est impair :
  On refait le même type de raisonnement. On suppose par l'absurde que f admet au moins quatre racines notées par exemple $a < b < c < d$. On applique alors le théorème de Rolle à la fonction f respectivement sur les intervalles $[a, b]$, $[b, c]$ et $[c, d]$. Ce théorème nous donne ainsi l'existence de trois racines $A \in]a, b[$, $B \in]b, c[$ et $C \in]c, d[$ distinctes (car les intervalles sont disjoints) de f' : $f'(A) = f'(B) = f'(C) = 0$. Or une racine de f' vérifie : $x^{n-1} = -\frac{p}{n}$ avec $n-1$ pair car n est impair. Ainsi, on a
  - Si $p > 0$ alors $-p < 0$ et comme $n-1$ est pair, il n'y a aucune solution.
  - Si $p = 0$ alors il y a une unique solution qui est 0.
  - Si $p < 0$ alors $-p > 0$ et il y a alors exactement deux solutions sur $\mathbb{R}$.

  Ainsi, dans tous les cas, il y a au plus deux solutions. Contradiction avec nos trois solutions. Ainsi, ce raisonnement par l'absurde prouve bien que l'équation $x^n + px + q = 0$ a au plus trois solutions si n est impair.

Correction 14. Un exemple d'utilisation du théorème d'une fonction continue sur un segment.

1. D'après les hypothèses sur la fonction f, on sait que f' est continue sur le segment $[0,1]$ car f est C^1 sur ce segment. Ainsi, d'après le théorème sur les fonctions continues sur un segment, on sait que f' est bornée et atteint ses bornes. En particulier, on sait donc qu'il existe un réel $d \in [0,1]$ tel que $f'(d)$ est le minimum de la fonction f' sur $[0,1]$. On a donc par définition d'un minimum :
$$\forall x \in [0,1], \quad f'(x) \geq f'(d).$$
Mais par hypothèse sur f', on sait que f' est strictement positive sur $[0,1]$ et ainsi, on en déduit que $f'(d) > 0$. Donc en posant $a = f'(d)$, on a bien $a > 0$ et on a bien aussi :
$$\forall x \in [0,1], \quad f'(x) \geq a.$$
2. Soit $x \in [0,1]$ fixé.
On applique le théorème des accroissements finis à la fonction f sur l'intervalle $[0,x]$. On vérifie les hypothèses :
   - La fonction f est continue sur $[0,x]$ (par hypothèse)
   - La fonction f est dérivable sur $]0,x[$ (par hypothèse)

   Ainsi, d'après le théorème des accroissements finis, on sait qu'il existe un réel $c \in]0,x[$ tel que
$$f(x) - f(0) = xf'(c).$$
Comme $f(0) = 0$, cela revient à : $f(x) = xf'(c)$. Or, on sait de plus que : $f'(c) \geq a$ et comme $x \geq 0$, on obtient bien que :
$$f(x) \geq ax.$$

Correction 15. On pose la fonction $h = g - f$. D'après les hypothèses faites sur f et sur g, on a

- h est C^2 sur $[a,b]$
- $h(a) = h(b) = 0$
- $h^{(2)} \geq 0$.

On veut montrer que h est toujours négative sur $[a,b]$. Pour cela, on cherche à étudier les variations de h.
Comme $h^{(2)}$ est positive sur $[a,b]$, on sait que la fonction h' est croissante sur $[a,b]$. De plus, on a :

- h est continue sur $[a,b]$
- h est dérivable sur $]a,b[$
- $h(a) = h(b)$.

Donc d'après le théorème de Rolle, on sait qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $h'(c) = 0$. Comme h' est croissante, on a donc : h' est négative sur $[a,c]$ et h' est positive sur $[c,b]$.
Ainsi, on obtient les variations suivantes pour la fonction h :

x	a		c		b
$h'(x)$		-	0	+	
h	0	$\searrow$		$\nearrow$	0

Donc la fonction h est bien toujours négative sur $[a,b]$ et on a donc bien démontré que :
$$\forall x \in [a,b], \quad g(x) \leq f(x).$$

Correction 16. Pour montrer des inégalités une des méthodes possibles est d'utiliser le théorème des accroissements finis.

1. On fixe a et h deux réels tels que $0 < a < a+h < \dfrac{\pi}{2}$. On applique le théorème des accroissements finis à la fonction $f : x \mapsto f(x) = \sin(x)$ sur l'intervalle $[a, a+h]$. On vérifie les hypothèses :
   - La fonction f est continue sur $[a, a+h]$ car elle est C^∞ sur $\mathbb{R}$
   - La fonction f est dérivable sur $]a, a+h[$ car elle est C^∞ sur $\mathbb{R}$

   Ainsi, d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]a, a+h[$ tel que
   $$f(a+h) = f(a)+(a+h-a)f'(c) \Leftrightarrow \sin(a+h)-\sin(a) = hf'(x) \Leftrightarrow \sin(a+h)-\sin(a) = h\cos(c).$$
   Mais on sait de plus que $0 < a < c < a+h < \dfrac{\pi}{2}$ et la fonction cosinus est strictement décroissante sur cet intervalle ainsi on obtient que
   $$\cos(c) < \cos(a).$$
   Finalement, comme $h > 0$, on obtient bien que : $\boxed{\sin(a+h) < \sin(a) + h\cos(a).}$
2. **Montrons que $\forall \mathbf{x} > -\mathbf{1}, \quad \ln(\mathbf{1}+\mathbf{x}) \leq \mathbf{x}$:**
   Soit $x > -1$ fixé. On applique le théorème des accroissements finis à la fonction $f : t \mapsto \ln(1+t)$ sur l'intervalle $[0, x]$ ou $[x, 0]$. On vérifie les hypothèses :
   - La fonction f est continue sur $[0, x]$ ou $[x, 0]$ car elle est C^∞ sur $]-1, +\infty[$
   - La fonction f est dérivable sur $]0, x[$ ou $]x, 0[$ car elle est C^∞ sur $]-1, +\infty[$

   Ainsi, d'après le théorème des accroissements finis, il existe c compris entre 0 et x tel que
   $$f(x) - f(0) = x \times f'(c) \Leftrightarrow \ln(1+x) = \frac{x}{1+c}.$$
   On doit alors distinguer deux cas selon que $x > 0$ ou $-1 < x < 0$ (le cas où $x = 0$ marche car : $\ln(1+x) = \ln(1) = 0$ et $0 \leq 0$).
   - CAS 1 : si $x > 0$:
     On a alors que : $0 < c < x \Leftrightarrow 1 < 1+c < 1+x$ et donc en particulier on a : $1 < 1+c \Leftrightarrow \dfrac{1}{1+c} < 1$ car la fonction inverse est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et tous les termes sont bien strictement positifs. Enfin comme $x > 0$, on obtient en multipliant l'inégalité par x : $\dfrac{x}{1+c} < x \Leftrightarrow \ln(1+x) \leq x$ car d'après le théorème des accroissements finis, on sait que : $\ln(1+x) = \dfrac{x}{1+c}$.
   - CAS 2 : si $-1 < x < 0$:
     On a alors que : $x < c < 0 \Leftrightarrow 1+x < 1+c < 1$ et donc en particulier on a : $1+c < 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{1+c} > 1$ car la fonction inverse est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et tous les termes sont bien strictement positifs (car $1+c > 1+x > 0$ car par hypothèse $x > -1$). Enfin comme $x < 0$, on obtient en multipliant l'inégalité par x : $\dfrac{x}{1+c} < x \Leftrightarrow \ln(1+x) \leq x$ car d'après le théorème des accroissements finis, on sait que : $\ln(1+x) = \dfrac{x}{1+c}$.

   Ainsi on a bien montré que dans tous les cas, on a : $\boxed{\ln(1+x) \leq x.}$
3. **Montrons que $\forall \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \quad (\mathbf{1}+\mathbf{x})^\alpha \geq \mathbf{1} + \alpha\mathbf{x}$ avec $\alpha > \mathbf{1}$:**
   Soit $x \geq 0$ fixé.
   On applique le théorème des accroissements finis à la fonction $f : t \mapsto (1+t)^\alpha$ sur l'intervalle $[0, x]$. On vérifie les hypothèses :
   - La fonction f est continue sur $[0, x]$ car elle est C^∞ sur $]-1, +\infty[$.
   - La fonction f est dérivable sur $]0, x[$ car elle est C^∞ sur $]-1, +\infty[$.

Ainsi, d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]0, x[$ tel que

$$f(x) - f(0) = xf'(c) \Leftrightarrow (1+x)^\alpha - 1 = \alpha x(1+c)^{\alpha-1}.$$

On encadre alors la dérivée $f'(c)$ et on a : $0 < c < x \Leftrightarrow 1 < 1+c < 1+x$ donc en particulier on obtient que : $1+c > 1$. De plus la fonction $t \mapsto t^{\alpha-1}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+\star}$ car $\alpha > 1$ (en effet cette fonction est dérivable et sa dérivée est la fonction : $t \mapsto (\alpha-1)t^{\alpha-2}$ qui est bien strictement positive sur $\mathbb{R}^{+\star}$ comme produit de deux termes strictement positifs car $\alpha > 1$). On obtient donc que : $(1+t)^{\alpha-1} > 1$ par composition par une fonction strictement croissante. Puis comme $\alpha x > 0$, on obtient que : $\alpha x(1+c)^{\alpha-1} > \alpha x$. Ainsi, comme d'après le théorème des accroissements finis on a : $(1+x)^\alpha - 1 = \alpha x(1+c)^{\alpha-1}$, on vient donc de montrer que : $(1+x)^\alpha - 1 > \alpha x$ et ainsi on a bien que : $\boxed{(1+x)^\alpha \geq 1 + \alpha x.}$

4. On fixe $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.
On applique le théorème des accroissements finis à la fonction $f : \ t \mapsto f(t) = \tan(t)$ sur l'intervalle $[0, x]$. On vérifie les hypothèses :
   - La fonction f est continue sur $[0, x]$ car elle est C^∞ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$
   - La fonction f est dérivable sur $]0, x[$ car elle est C^∞ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$

   Ainsi, d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]0, x[$ tel que

   $$f(x) - f(0) = xf'(c) \Leftrightarrow \tan(x) = x(1 + \tan^2(c)) = \frac{x}{\cos^2(c)}.$$

   On a tout de suite : $1 + \tan^2(c) > 1$ et comme $x > 0$, on obtient déjà que

   $$x < \tan(x).$$

   De plus, on sait que $0 < c < x < \frac{\pi}{2}$. Comme la fonction cosinus est strictement décroissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on obtient que

   $$\cos(c) > \cos(x).$$

   Comme les deux termes sont positifs car le cosinus est positif sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a : $\cos^2(c) > \cos^2(x)$ puis $\frac{1}{\cos^2(c)} < \frac{1}{\cos^2(x)}$. Comme $x > 0$, on obtient ainsi

   $$\tan(x) < \frac{x}{\cos^2(x)}.$$

   On a donc bien finalement que : $\boxed{0 < \tan(x) < \frac{x}{\cos^2(x)}.}$

5. **Montrons que $\forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in]-\infty, \mathbf{0}]^{\mathbf{2}}, \quad |\mathbf{e^x} - \mathbf{e^y}| \leq |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$:**
Soit $(x, y) \in]-\infty, 0]^2$ fixé.
On applique le théorème des accroissements finis à la fonction $f : \ t \mapsto e^t$ sur l'intervalle $[x, y]$ ou $[y, x]$. On vérifie les hypothèses :
   - La fonction f est continue sur $[x, y]$ ou $[y, x]$ car elle est C^∞ sur $\mathbb{R}$
   - La fonction f est dérivable sur $]x, y[$ ou $]y, x[$ car elle est C^∞ sur $\mathbb{R}$

   Ainsi, d'après le théorème des accroissements finis, il existe c compris entre x et y tel que

   $$f(x) - f(y) = (x - y)f'(c) \Leftrightarrow e^x - e^y = (x - y)e^c.$$

   On passe alors à la valeur absolue et cette inégalité devient :

   $$|e^x - e^y| = |x - y| \times |e^c| \Leftrightarrow |e^x - e^y| = |x - y| \times e^c$$

car $e^c > 0$.
Il reste alors à encadrer la dérivée. Comme $(x, y) \in]-\infty, 0]^2$ et que c est compris entre x et y, on en déduit en particulier que : $c < 0 \Leftrightarrow e^c < 1$ en utilisant le fait que la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Puis en multipliant par $|x - y| \geq 0$, on obtient que : $|x - y| \times e^c \leq |x - y|$. Or le théorème des accroissements finis nous a permis de montrer que : $|e^x - e^y| = |x - y| \times e^c$. Ainsi on vient bien de prouver que : $\boxed{|e^x - e^y| \leq |x - y|.}$

Correction 17. On pose f la fonction associée à la suite définie par récurrence : $f(x) = \sqrt{12 + x}$. On a en particulier que $\mathcal{D} = [-12, +\infty[$.

1. - On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété

$$\mathcal{P}(n) : \quad v_n \text{ est bien défini et } v_n \in [0, 4[.$$

   - Initialisation : pour $n = 0$:
   Par définition de la suite, on sait que $v_0 = 1$. Ainsi, v_0 est bien défini et $v_0 \in [0, 4[$. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
   - Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose la propriété vraie à l'ordre n, montrons qu'elle est vraie à l'ordre $n + 1$. Par hypothèse de récurrence, on sait que v_n est bien définie et que $v_n \in [0, 4[$. On a alors :
     - ⋆ v_n est bien définie et $v_n \in [0, 4[\subset \mathcal{D}_f$. Ainsi $f(v_n)$ existe et donc v_{n+1} existe.
     - ⋆ Comme $v_n \in [0, 4[$, on a : $12 + v_n \in [12, 16[$ et la fonction racine carrée étant strictement croissante, on a : $\sqrt{12 + v_n} \in [\sqrt{12}, 4[\subset [0, 4[$. Ainsi, on a bien $v_{n+1} \in [0, 4[$.

   Ainsi, $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie.
   - Conclusion : il résulte du principe de récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ v_n est bien défini et que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n \in [0, 4[.$$

2. On reconnaît une inégalité type TAF. Pour cela, il suffit de remarquer que 4 est point fixe de f : en effet $f(4) = \sqrt{16} = 4$. On applique donc le théorème des accroissements finis à la fonction f entre v_n et 4. On vérifie les hypothèses :
   - La fonction f est continue sur $[v_n, 4]$ (ici on sait que $v_n < 4$)
   - La fonction f est dérivable sur $]v_n, 4[$.

   Ainsi, d'après le théorème des accroissements finis, on sait qu'il existe $c \in]v_n, 4[$ tel que

$$f(4) - f(v_n) = (4 - v_n)f'(c) \Leftrightarrow 4 - v_{n+1} = (4 - v_n)f'(c).$$

   Il reste alors à majorer la dérivée $f'(c)$. Or, on a : $f'(c) = \dfrac{1}{2\sqrt{12 + c}}$. Or on sait que $c > v_n > 0$ donc $12 + c > 12$ et ainsi : $\dfrac{1}{2\sqrt{12 + c}} < \dfrac{1}{2\sqrt{12}}$. Or : $2\sqrt{12} = 4\sqrt{3} > 4$ et ainsi, on obtient que : $\dfrac{1}{2\sqrt{12 + c}} < \dfrac{1}{2\sqrt{12}} < \dfrac{1}{4}$. Puis, comme $4 - v_n > 0$, on a bien que

$$4 - v_{n+1} < \frac{1}{4}(4 - v_n).$$

3. Comme $v_n < 4$, on a donc que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 < 4 - v_{n+1} < \frac{1}{4}(4 - v_n).$$

   Par itération, on conjecture que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$0 < 4 - v_n < \left(\frac{1}{4}\right)^n (4 - v_0) \Leftrightarrow 0 < 4 - v_n < 3\left(\frac{1}{4}\right)^n.$$

   Il faudrait montrer ce résultat par récurrence.
   Puis, ensuite, comme $-1 < \dfrac{1}{4} < 1$, on sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{4}\right)^n = 0$ et ainsi d'après le théorème des gendarmes, on obtient que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et qu'elle converge vers 4.

Correction 18. Série de Riemann

1. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ fixé. On va appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction $f : x \mapsto \ln(x)$ entre $[n, n+1]$. On vérifie les hypothèses :
   - $\star$ La fonction f est continue sur $[n, n+1]$ comme fonction usuelle.
   - $\star$ La fonction f est dérivable sur $]n, n+1[$ comme fonction usuelle.

   Ainsi, d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]n, n+1[$ tel que :
   $$f(n+1) - f(n) = (n+1-n)f'(c) \Leftrightarrow \ln(n+1) - \ln(n) = \frac{1}{c}.$$
   Mais on sait que $c \in]n, n+1[$ et la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}^{+\star}$ donc : $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{c} < \frac{1}{n}$. On obtient donc bien
   $$\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln(n) < \frac{1}{n}.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. D'après l'inégalité précédente, on sait que, pour tout $k \in \{2, \dots, n\}$, on a :
   $$\ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k} \leq \ln(k) - \ln(k-1).$$
   Ainsi, en sommant ces inégalités pour k allant de 2 à n en obtient :
   $$\sum_{k=2}^{n} (\ln(k+1) - \ln(k)) \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \sum_{k=2}^{n} (\ln(k) - \ln(k-1)).$$
   Comme les sommes sont télescopiques, on obtient :
   $$\ln(n+1) - \ln(2) \leq u_n - 1 \leq \ln(n) - 0 \Leftrightarrow \ln(n+1) - \ln(2) + 1 \leq u_n \leq \ln(n) + 1.$$
   On a donc :
   $$\frac{\ln(n+1) - \ln 2 + 1}{\ln(n)} \leq \frac{u_n}{\ln(n)} \leq \frac{\ln(n)+1}{\ln(n)}.$$
   Comme $\frac{\ln(n)+1}{\ln(n)} = 1 + \frac{1}{\ln(n)}$, on a : $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)+1}{\ln(n)} = 1$. De même, on a :
   $$\frac{\ln(n+1) - \ln 2 + 1}{\ln(n)} = \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} + \frac{1-\ln(2)}{\ln(n)} = \frac{\ln(n) + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} + \frac{1-\ln(2)}{\ln(n)} = 1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} + \frac{1-\ln(2)}{\ln(n)}.$$
   Ainsi, on a aussi : $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n+1) - \ln 2 + 1}{\ln(n)} = 1$. Ainsi, d'après le théorème des gendarmes, on obtient
   $$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{\ln(n)} = 1 \Leftrightarrow u_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n).$$
   On obtient ainsi que $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

3. On refait le même type de raisonnement.
   - Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ fixé. On va appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction $f : x \mapsto x^{1-\alpha}$ sur l'intervalle $[n, n+1]$. On vérifie les hypothèses :
     - $\star$ La fonction f est continue sur $[n, n+1]$
     - $\star$ La fonction f est dérivable sur $]n, n+1[$

     Ainsi, d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]n, n+1[$ tel que
     $$f(n+1) - f(n) = (n+1-n)f'(c) \Leftrightarrow (n+1)^{1-\alpha} - n^{1-\alpha} = f'(c).$$
     Or, on a : $f'(c) = (1-\alpha)c^{-\alpha} = \frac{1-\alpha}{c^\alpha}$. Comme on sait d'après le théorème des accroissements finis que $c \in [n, n+1]$ et que $\alpha > 0$, on a : $\frac{1}{(n+1)^\alpha} < \frac{1}{c^\alpha} < \frac{1}{n^\alpha}$. Puis comme $\alpha \in]0, 1[$, on sait que : $1 - \alpha > 0$ et ainsi on obtient que :
     $$\frac{1-\alpha}{(n+1)^\alpha} < \frac{1-\alpha}{c^\alpha} < \frac{1-\alpha}{n^\alpha} \quad \text{d'où} \quad \frac{1-\alpha}{(n+1)^\alpha} < (n+1)^{1-\alpha} - n^{1-\alpha} < \frac{1-\alpha}{n^\alpha}.$$

- On en déduit un encadrement du terme v_n. En effet, l'inégalité ci-dessus donne pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$:
$$(k+1)^{1-\alpha} - k^{1-\alpha} < \frac{1-\alpha}{k^\alpha} < (k)^{1-\alpha} - (k-1)^{1-\alpha}.$$
Il s'agit alors de sommer ces inégalités pour k allant de 2 à n :
$$\sum_{k=2}^{n} (k+1)^{1-\alpha} - k^{1-\alpha} < v_n - 1 < \sum_{k=2}^{n} k^{1-\alpha} - (k-1)^{1-\alpha}.$$
Comme elles sont télescopiques, on obtient
$$(n+1)^{1-\alpha} - 2^{1-\alpha} + 1 < v_n < n^{1-\alpha} - 1 + 1 \Leftrightarrow (n+1)^{1-\alpha} - 2^{1-\alpha} + 1 < v_n < n^{1-\alpha}.$$
On conjecture que l'équivalent va être $n^{1-\alpha}$. Pour le montrer, on divise tout par $n^{1-\alpha} > 0$ et on obtient que :
$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^{1-\alpha} + \frac{1-2^{1-\alpha}}{n^{1-\alpha}} < \frac{v_n}{n^{1-\alpha}} < 1.$$
Comme on a bien que : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{1-\alpha} + \frac{1-2^{1-\alpha}}{n^{1-\alpha}} = 1$, on obtient par le théorème des gendarmes que
$$\lim_{n \to +\infty} \frac{v_n}{n^{1-\alpha}} = 1 \Leftrightarrow v_n \underset{+\infty}{\sim} n^{1-\alpha}.$$
- Calcul de la limite :
Comme $1-\alpha > 0$, on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.

IV Calculs de dérivées n-ièmes

Correction 19. Dérivées de composées :

- La fonction g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ comme composée d'une fonction polynomiale et de f, fonction C^∞ sur $\mathbb{R}$. De plus, on a
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = 2xf'(x^2).$$
- Le calcul donne
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g^{(2)}(x) = 2f'(x^2) + 4x^2 f^{(2)}(x^2).$$
- On redérive et on obtient
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g^{(3)}(x) = 12xf^{(2)}(x^2) + 8x^3 f^{(3)}(x^2).$$
- La fonction h est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^\star$ comme composée de la fonction inverse et de f, fonction C^∞ sur $\mathbb{R}$. De plus, on a
$$\forall x \in \mathbb{R}^\star, \quad h'(x) = \frac{-1}{x^2} h'\left(\frac{1}{x}\right).$$
- Le calcul donne
$$\forall x \in \mathbb{R}^\star, \quad h^{(2)}(x) = \frac{2}{x^3} f'\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^4} f^{(2)}\left(\frac{1}{x}\right).$$
- On redérive et on obtient
$$\forall x \in \mathbb{R}^\star, \quad h^{(3)}(x) = \frac{-6}{x^4} f'\left(\frac{1}{x}\right) + f^{(2)}\left(\frac{1}{x}\right)\frac{-6}{x^5} - \frac{1}{x^6} f^{(3)}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Correction 20. Linéariser $f(x) = \cos^3(x)$ et en déduire l'expression de la dérivée n-ième de f pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- Linéarisation de $f(x) = \cos^3(x)$:
  On utilise la formule d'Euler et on obtient que :
  $$\cos^3(x) = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}\left[e^{3ix} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-3ix}\right] = \boxed{\frac{\cos(3x) + 3\cos(x)}{4}}.$$
- La fonction f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions de classe C^∞. Ainsi il existe bien sur $\mathbb{R}$ des dérivées successives à tous les ordres.
- Calcul de $f^{(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$:
  On a pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f^{(n)}(x) = \frac{1}{4}\left[g^{(n)}(x) + 3h^{(n)}(x)\right]$ avec $g(x) = \cos(3x)$ et $h(x) = \cos(x)$. De plus, on peut montrer par récurrence que
  $$\forall x \in \mathbb{R},\ h^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \qquad g^{(n)}(x) = 3^n \cos\left(3x + n\frac{\pi}{2}\right).$$
  Ainsi on obtient que :
  $$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = \frac{3}{4}\left[3^{n-1}\cos\left(3x + n\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)\right]}$$

Correction 21. Calculs de dérivées n-ièmes de fonctions :

1. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$
   - ⋆ La fonction f est C^∞ sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ comme fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas.
   - ⋆ On peut commencer par remarquer que $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ et ainsi, on a : $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)(x+1)}$. On cherche à transformer cette expression grâce à une décomposition en éléments simples. On cherche deux réels a et b tels que :
     $$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}, \quad f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}.$$
     En mettant sur le même dénominateur et en identifiant, on obtient que
     $$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}, \quad f(x) = \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)}.$$
     Ainsi, d'après la somme de dérivées successives, on obtient que
     $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}, \quad f^{(n)}(x) = \frac{1}{2}\left(g^{(n)}(x) - h^{(n)}(x)\right)$$
     avec $g(x) = \dfrac{1}{x-1}$ et $h(x) = \dfrac{1}{1+x}$. Les dérivées n-ième de ces fonctions sont à connaître et à savoir retrouver très rapidement. On conjecture une formule en calculant les premières dérivées n-ième, formule que l'on démontre par récurrence. Les calculs donnent :
     $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}, \quad g^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}} \quad \text{et} \quad h^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}.$$
     Ainsi, en sommant, on obtient que
     $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}, \quad f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{2}\left(\frac{1}{(x-1)^{n+1}} - \frac{1}{(x+1)^{n+1}}\right).$$
2. $g(x) = x^5 - \ln(x-2) + 5e^{-x}$

⋆ La fonction g est C^∞ sur $]2,+\infty[$ comme somme et composée de fonctions $\mathcal{C}^\infty$.

⋆ On a, par sommes de dérivées n-ièmes : $g^{(n)}(x) = f_1^{(n)}(x)+f_2^{(n)}(x)+f_2^{(n)}(x)$, avec $f_1(x) = x^5$, $f_2(x) = \ln(x-2)$ et $f_3(x) = 5e^{-x}$. Les dérivées n-ième de ces fonctions sont à connaître et à savoir retrouver très rapidement. On conjecture une formule en calculant les premières dérivées n-ième, formule que l'on démontre par récurrence. Les calculs donnent, pour $n \geq 1$:

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \dfrac{5!}{(5-n)!}x^{5-n} - \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x-2)^n} + 5(-1)^n e^{-x} & \text{si } n \leq 5 \\ -\dfrac{(-1)^n(n-1)!}{(x-2)^n} + 5(-1)^n e^{-x} & \text{si } n > 5 \end{cases}$$

Correction 22. Calculs de dérivées n-ièmes de fonctions :

1. $f(x) = x^3 e^{-x}$

   ⋆ La fonction f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ comme composée et produit de fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

   ⋆ Comme c'est un produit de fonctions usuelles, on utilise la formule de Leibniz et on obtient, en posant pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u(x) = x^3$ et $v(x) = e^{-x}$:

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(k)}(x)v^{(n-k)}(x).$$

   Or on a

   $$\forall x \in \mathbb{R},\ u'(x) = 3x^2,\ u^{(2)}(x) = 6x,\ u^{(3)}(x) = 6 \quad \text{et} \quad \forall k \geq 4,\ u^{(k)}(x) = 0.$$

   De plus, on a :

   $$\forall x \in \mathbb{R},\ v'(x) = -e^{-x},\ v^{(2)}(x) = e^{-x},\ v^{(3)}(x) = -e^{-x}.$$

   Ainsi, on peut conjecturer que

   $$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ v^{(n)}(x) = (-1)^n e^{-x}.$$

   On obtient alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$

   $$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{3} \binom{n}{k} u^{(k)}(x)v^{(n-k)}(x) \\ &= x^3(-1)^n e^{-x} + 3nx^2(-1)^{n-1}e^{-x} + \frac{n(n-1)}{2}6x(-1)^{n-2}e^{-x} + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}6(-1)^{n-3}e^{-x} \\ &= (-1)^n e^{-x}\left(x^3 - 3nx^2 + 3n(n-1)x - n(n-1)(n-2)\right). \end{aligned}$$

2. $f(x) = (x^2+1)\sin x$

   ⋆ La fonction f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions C^∞ sur $\mathbb{R}$.

   ⋆ C'est un produit de deux fonctions, on utilise alors la formule de Leibniz. On obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

   $$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(k)}(x)v^{(n-k)}(x),$$

   en posant $u(x) = 1 + x^2$ et $v(x) = \sin(x)$. On a alors pour tout $x \in \mathbb{R}$:

   $$u'(x) = 2x \quad u^{(2)}(x) = 2 \qquad \text{et} \qquad \forall k \geq 3,\ u^{(k)}(x) = 0.$$

De plus, il faut connaître les dérivées successives du sinus et qui sont

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall k \in \mathbb{N},\ \sin^{(k)}(x) = \sin\left(x + k\frac{\pi}{2}\right).$$

On obtient ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} f^{(k)}(x) &= \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} u^{(k)}(x) v^{(n-k)}(x) \\ &= (1+x^2)\sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) + 2nx\sin\left(x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right) + n(n-1)\sin\left(x + (n-2)\frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

3. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$

   ⋆ La fonction f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^{+\star}$ comme quotient dont le dénominateur ne s'annule pas de fonctions de classe C^∞ sur cet ensemble.

   ⋆ On peut voir f comme le produit de $u(x) = \ln x$ et de $v(x) = \dfrac{1}{x^2}$. D'après la formule de Leibniz, on obtient ainsi

   $$\forall x > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \quad f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(k)}(x) v^{(n-k)}(x).$$

   On calcule donc les dérivées successives de ces fonctions. Pour le logarithme, on a vu dans le cours (à savoir refaire) que :

   $$\forall x > 0, \forall k \in \mathbb{N}^\star : u^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k+1}(k-1)!}{x^k}.$$

   Pour la fonction v, on commence par calculer ses premières dérivées puis on conjecture la formule :

   $$\forall x > 0, \quad v'(x) = \frac{-2}{x^3} \qquad v^{(2)}(x) = \frac{3!}{x^4} \qquad v^{(3)}(x) = \frac{-4!}{x^5}.$$

   Ainsi, on peut conjecturer la formule suivante qu'il faudrait démontrer par récurrence :

   $$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x > 0,\ v^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k (k+1)!}{x^{k+2}}.$$

   On obtient alors, pour tout $x > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$

   $$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \ln(x)\frac{(-1)^n(n+1)!}{x^{n+2}} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{n+1}(k-1)!(n-k+1)!}{x^{n+2}} \\ &= \ln(x)\frac{(-1)^n(n+1)!}{x^{n+2}} + \frac{(-1)^{n+1}}{x^{n+2}} \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \times (k-1)!(n-k+1)! \\ &= \ln(x)\frac{(-1)^n(n+1)!}{x^{n+2}} + \frac{(-1)^{n+1}n!}{x^{n+2}} \sum_{k=1}^{n} \frac{n-k+1}{k} \end{aligned}$$

4. $f(x) = x^{n-1}\ln x$

   ⋆ La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+\star}$ comme produit de fonctions de classe C^∞.

   ⋆ La fonction f est le produit de la fonction $u :\ x \mapsto u(x) = x^{n-1}$ et de la fonction $v :\ x \mapsto \ln(x)$. Par la formule de Leibniz, on a, pour tout $x > 0$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$:

   $$f^{(p)}(x) = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} u^{(k)}(x) v^{(p-k)}(x).$$

Calculons les dérivées k-ième de u :
Pour tout $k \geq n$, on a : $u^{(k)}(x) = 0$ car u est une fonction polynomiale de degré $n-1$.
Soit alors $k \in \{0, \dots n-1\}$, on obtient :

$$u'(x) = (n-1)x^{n-2} \quad u^{(2)}(x) = (n-1)(n-2)x^{n-3} \quad u^{(3)}(x) = (n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4}.$$

On peut donc conjecturer que si $k \in \{0, \dots n-1\}$, on obtient :

$$u^{(k)}(x) = \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!}x^{n-k-1}.$$

Calculons alors les dérivées k-ième de v :
On a :

$$v'(x) = \frac{1}{x} \quad v^{(2)}(x) = \frac{-1}{x^2} \quad v^{(3)}(x) = \frac{2}{x^3}.$$

On conjecture ainsi que

$$\forall k \geq 1, \forall x > 0, \quad v^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{x^k}.$$

Calculons alors les dérivées successives de f :

— CAS 1 : si $p \leq n-1$:
On a alors

$$\begin{aligned} f^{(p)}(x) &= u^{(p)}(x)\ln(x) + \sum_{k=0}^{p-1}\binom{p}{k}\frac{(n-1)!}{(n-k-1)!}x^{n-k-1}\frac{(-1)^{p-k-1}(p-k-1)!}{x^{p-k}} \\ &= \frac{(n-1)!}{(n-p-1)!}x^{n-p-1}\ln(x) + (n-1)!x^{n-p-1}\sum_{k=0}^{p-1}\binom{p}{k}(-1)^{p-k-1} \times \frac{(p-k-1)!}{(n-k-1)!}. \end{aligned}$$

Ici, on a sorti de la somme la cas particulier $k = p$ car cela correspond à $v^{(0)}$ et la formule des dérivées k ième de v ne s'applique pas pour $k = 0$.

— CAS 2 : Si $p \geq n$:
Alors la somme s'arrête à $n-1$ car au-dessus, les dérivées k ième de u s'annule. On obtient ainsi

$$\begin{aligned} f^{(p)}(x) &= \sum_{k=0}^{n-1}\binom{p}{k}\frac{(n-1)!}{(n-k-1)!}x^{n-k-1} \times \frac{(-1)^{p-k-1}(p-k-1)!}{x^{p-k}} \\ &= (n-1)!x^{n-p-1}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{p}{k}\frac{(p-k-1)!}{(n-k-1)!}(-1)^{p-k-1}. \end{aligned}$$

Correction 23. Étude de dérivées n-ièmes :

1. La fonction tangente est de classe C^∞ sur $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{\forall k \in \mathbb{Z},\ \frac{\pi}{2} + k\pi\}$ comme quotient de fonctions C^∞ dont le dénominateur ne s'annule pas.
2. Calcul de ses dérivées n-ième :
   - On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété

     $\mathcal{P}(n)$: f est de classe C^n sur $\mathcal{D}_f$ et il existe un polynôme P_n tel que : $\forall x \in \mathcal{D}_f,\ f^{(n)}(x) = P_n(\tan x)$.

   - Initialisation : pour $n = 0$:
     La fonction tangente est bien continue sur $\mathcal{D}_f$.
     D'un côté, on a : $f^{(0)}(x) = \tan x$ et de l'autre côté, on a : $P_0(\tan x)$. Il suffit donc de prendre le polynôme $P_0 = X$ qui convient bien. Ainsi, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

- Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose la propriété vraie au rang n, montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$. Par hypothèse de récurrence, on sait que la fonction tangente est de classe C^n sur $\mathcal{D}_f$ et qu'il existe un polynôme P_n tel que

$$\forall x \in \mathcal{D}_f, \quad f^{(n)}(x) = P_n(\tan x).$$

  - ⋆ Cette fonction $f^{(n)}$ est bien dérivable sur $\mathcal{D}_f$ comme fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas.
  - ⋆ On dérive et on obtient alors :

$$\forall x \in \mathcal{D}_f, \quad f^{(n+1)}(x) = P_n'(\tan x) \times \left(1 + \tan^2 x\right).$$

    Si on pose $P_{n+1} = (1+X^2)P_n'$. C'est bien un polynôme car $1+X^2$ est un polynôme, P_n' est un polynôme car c'est la dérivée d'un polynôme et la somme de deux polynômes est un polynôme. Ainsi, P_{n+1} est un polynôme et on a bien

$$\forall x \in \mathcal{D}_f, \qquad f^{(n+1)}(x) = P_{n+1}(\tan x).$$

  - ⋆ Cette fonction $f^{(n+1)}$ est bien continue sur $\mathcal{D}_f$ et donc f est bien de classe C^{n+1} sur $\mathcal{D}_f$.

  Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
- Conclusion : il résulte du principe de récurrence que la dérivée n-ième de la fonction tangente est bien de la forme $P_n \circ \tan$ avec P_n polynôme.

3. Degré et coefficient dominant de P_n :
   - Le calcul des premiers polynômes de la suite donne : $P_0 = X$, $P_1 = X^2+1$, $P_2 = 2X^3+2X$, $P_3 = 3!X^4 + 6X^2$.
   - Ainsi on peut conjecturer que $\deg P_n = n+1$ et $a_n = n!$ avec a_n coefficient dominant de P_n.
     - ⋆ On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}(n)$: $\deg P_n = n+1, \ a_n = n!$.
     - ⋆ Initialisation : pour $n = 0$: on a vu que $P_0 = X$ donc on a : $\deg P_0 = 1 = 0+1$ et $a_0 = 1 = 0!$. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
     - ⋆ Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ fixé, on suppose vraie la propriété à l'ordre n, montrons qu'elle est vraie à l'ordre $n+1$. Par hypothèse de récurrence, on sait que : $P_n = n!X^{n+1} + T$ avec $T \in \mathbb{R}_n[X]$. De plus, on sait que $P_{n+1} = (1+X^2)P_n'$ donc on obtient que : $P_{n+1} = (1+X^2)((n+1)!X^n + T') = (n+1)!X^{n+2} + R$ avec $R = (n+1)!X^n + (1+X^2)T'$. Et $R \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$ par propriété sur le degré d'une dérivée, d'un produit et d'une somme de polynômes. Ainsi on a bien que : $\deg P_{n+1} = n+2$ et $a_{n+1} = (n+1)!$. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
     - ⋆ Conclusion : il résulte du principe de récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\deg P_n = n+1$ et le coefficient dominant de P_n est $n!$.

Correction 24. Étude de dérivées n-ièmes :

1. La fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ comme fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas.
2. - Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété

$$\mathcal{P}(n) : \quad f \text{ est de classe } C^n \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et il existe un polynôme } P_n \text{ tel que } \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}.$$

   - Initialisation : pour $n = 0$:
     La fonction f est bien continue sur $\mathbb{R}$ comme fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas.
     D'un côté, on a : $f^{(0)}(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ et de l'autre côté, on a : $\dfrac{P_0(x)}{1+x^2}$. Ainsi, le polynôme $P_0 = 1$ convient et $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

- Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose que la propriété est vraie au rang n, montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$. Par hypothèse de récurrence, on sait que la fonction f est de classe C^n sur $\mathbb{R}$ et qu'il existe un polynôme P_n tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}.$$

  - ⋆ Cette fonction $f^{(n)}$ est bien dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas.
  - ⋆ On dérive et on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}\right)'(x) = \frac{P_n'(x)(1+x^2)^{n+1} - 2xP_n(x)(n+1)(1+x^2)^n}{(1+x^2)^{2n+2}} = \frac{P_n'(x)(1+x^2) - 2x(n+}{(1+x^2)^{n+2}}$$

    Ainsi, si on pose $P_{n+1} = (1+X^2)P_n' - 2X(n+1)P_n$, on a bien que P_{n+1} est un polynôme comme produit et somme de polynôme et on a bien que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n+1)}(x) = \frac{P_{n+1}(x)}{(1+x^2)^{n+2}}.$$

  - ⋆ Cette fonction $f^{(n+1)}$ est bien continue sur $\mathbb{R}$ et donc f est bien de classe C^{n+1} sur $\mathbb{R}$.
- Conclusion : il résulte du principe de récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe P_n polynôme tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}.$$

3. Degré et coefficient dominant de P_n :
   - Le calcul des premiers polynômes de la suite donne : $P_0 = 1$, $P_1 = -2X$, $P_2 = 6X^2 - 2$, $P_3 = -24X^3 + T$.
   - Ainsi on peut conjecturer que $\deg P_n = n$ et $a_n = (-1)^n(n+1)!$ avec a_n coefficient dominant de P_n.
     - ⋆ On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}(n)$: $\deg P_n = n,\ a_n = (-1)^n(n+1)!$.
     - ⋆ Initialisation : pour $n = 0$: on a vu que $P_0 = 1$ donc on a : $\deg P_0 = 0$ et $a_0 = 1 = (-1)^0 1!$. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
     - ⋆ Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ fixé, on suppose vraie la propriété à l'ordre n, montrons qu'elle est vraie à l'ordre $n+1$. Par hypothèse de récurrence, on sait que : $P_n = (-1)^n(n+1)!X^n + T$ avec $T \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. De plus, on sait que $P_{n+1} = (1+X^2)P_n' - 2X(n+1)P_n$ donc on obtient que : $P_{n+1} = (1+X^2)((-1)^n n(n+1)!X^{n-1} + T') - 2X(n+1)((-1)^n(n+1)!X^n + T) = [(-1)^n(n+1)!(-n-2)]\,X^{n+1} + R$ avec $R = (-1)^n n(n+1)!X^{n-1} + (1+X^2)T' - 2X(n+1)T$. Et $R \in \mathbb{R}_n[X]$ par propriété sur le degré d'une dérivée, d'un produit et d'une somme de polynômes. Ainsi on a bien que : $\deg P_{n+1} = n+1$ et $a_{n+1} = (-1)^{n+1}(n+2)!$. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
     - ⋆ Conclusion : il résulte du principe de récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\deg P_n = n$ et le coefficient dominant de P_n est $(-1)^n(n+1)!$.

Correction 25. Étude de dérivées n-ièmes :

1. La fonction f est de classe C^∞ sur $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ comme quotient dont le dénominateur ne s'annule pas de fonction C^∞. De plus, le calcul donne

$$\forall x \in I, \quad f'(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x} \qquad \text{et} \qquad f^{(2)}(x) = \frac{\cos^3(x) + 2\sin^2(x)\cos(x)}{\cos^4(x)} = \frac{1+\sin^2(x)}{\cos^3(x)}$$

   en divisant tout par $\cos x$ qui pouvait être mis en facteur au numérateur et en utilisant le fait que : $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$.

2. • On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété

$$\mathcal{P}(n): \quad f \text{ est de classe } C^n \text{ sur } I \text{ et } \exists P_n \text{ polynôme tel que } \forall x \in I, \quad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin x)}{(\cos x)^{n+1}}.$$

• Initialisation : pour $n = 0$:
La fonction f est bien continue sur $\mathbb{R}$ comme quotient dont le dénominateur ne s'annule pas. D'un côté, on a : $f^{(0)}(x) = \dfrac{1}{\cos(x)}$ et de l'autre côté, on a : $\dfrac{P_0(x)}{\cos x}$. Ainsi, si on pose $P_0 = 1$, ce polynôme convient et $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

• Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose la propriété vraie au rang n, montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$. Par hypothèse de récurrence, on sait que la fonction f est de classe C^n sur I et qu'il existe un polynôme P_n tel que

$$\forall x \in I, \quad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin x)}{(\cos(x))^{n+1}}.$$

⋆ Cette fonction $f^{(n)}$ est bien dérivable sur I comme quotient dont le dénominateur ne s'annule pas.

⋆ On dérive $f^{(n)}$ et on obtient pour tout $x \in I$:

$$\begin{aligned}
f^{(n+1)}(x) &= \frac{P_n'(\sin x)\cos x \times \cos^{n+1} x - (n+1)P_n(\sin x)\cos^n(x)(-\sin x)}{\cos^{2n+2} x} \\
&= \frac{\cos^n x \left(P_n'(\sin x)\cos^2(x) + (n+1)P_n(\sin x)\sin x\right)}{\cos^{2n+2}(x)} \\
&= \frac{P_n'(\sin x)(1-\sin^2 x) + (n+1)P_n(\sin x)\sin x}{\cos^{n+2} x}.
\end{aligned}$$

Ainsi, si on pose

$$P_{n+1} = (1 - X^2)P_n' + (n+1)XP_n,$$

P_{n+1} est bien un polynôme comme somme de polynômes.

⋆ Cette fonction $f^{(n+1)}$ est bien continue sur I et donc f est bien de classe C^{n+1} sur I.

Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

• Conclusion : il résulte du principe de récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n tel que

$$\forall x \in I, \quad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(\cos x)^{n+1}}.$$

3. Degré et coefficient dominant de P_n :

• Le calcul des premiers polynômes de la suite donne : $P_0 = 1$, $P_1 = X$, $P_2 = X^2 + 1$, $P_3 = X^3 + 5X$.

• Ainsi on peut conjecturer que $\deg P_n = n$ et $a_n = 1$ avec a_n coefficient dominant de P_n.

⋆ On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}(n)$: $\deg P_n = n, \ a_n = 1$.

⋆ Initialisation : pour $n = 0$: on a vu que $P_0 = 1$ donc on a : $\deg P_0 = 0$ et $a_0 = 1$. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

⋆ Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ fixé, on suppose vraie la propriété à l'ordre n, montrons qu'elle est vraie à l'ordre $n+1$. Par hypothèse de récurrence, on sait que : $P_n = X^n + T$ avec $T \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. De plus, on sait que $P_{n+1} = (1 - X^2)P_n' + (n+1)XP_n$ donc on obtient que : $P_{n+1} = (1 + X^2)(nX^{n-1} + T') + (n+1)X(X^n + T) = X^{n+1} + R$ avec $R = nX^{n-1} + (1 - X^2)T' + (n+1)XT$. Et $R \in \mathbb{R}_n[X]$ par propriété sur le degré d'une dérivée, d'un produit et d'une somme de polynômes. Ainsi on a bien que : $\deg P_{n+1} = n+1$ et $a_{n+1} = 1$. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

- $\star$ Conclusion : il résulte du principe de récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\deg P_n = n$ et le coefficient dominant de P_n est 1.

Correction 26. Étude de dérivées n-ièmes :

1. La fonction f est de classe C^∞ sur $I =]-1, 1[$ comme composée et quotient dont le dénominateur ne s'annule pas de fonctions $\mathcal{C}^\infty$. Le calcul des dérivées successives donnent

$$\forall x \in I, \quad f'(x) = \frac{x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} \qquad \text{et} \qquad f^{(2)}(x) = \frac{-x^2+3x+1}{(1-x^2)^2\sqrt{1-x^2}}.$$

2.
   - On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété

   $$\mathcal{P}(n) : \qquad f \text{ est de classe } C^n \text{ sur } I \text{ et } \exists P_n \text{ polynôme tel que } \forall x \in I, \quad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1-x^2)^n\sqrt{1-x^2}}.$$

   - Initialisation : pour $n = 0$:
   La fonction f est bien continue sur $\mathbb{R}$ comme quotient dont le dénominateur ne s'annule pas.
   D'un côté, on a : $f^{(0)}(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et de l'autre côté, on a : $\frac{P_0(x)}{(1-x^2)^0\sqrt{1-x^2}} = \frac{P_0(x)}{\sqrt{1-x^2}}$.
   Ainsi, si on pose $P_0 = 1$ qui est bien un polynôme, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
   - Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose la propriété vraie au rang n, montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$. Par hypothèse de récurrence, on sait que la fonction f est de classe C^n sur I et qu'il existe un polynôme P_n tel que

   $$\forall x \in I, \quad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1-x^2)^n\sqrt{1-x^2}} = \frac{P_n(x)}{(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}}.$$

     - $\star$ Cette fonction $f^{(n)}$ est bien dérivable sur I comme quotient dont le dénominateur ne s'annule pas.
     - $\star$ On dérive cette expression pour obtenir $f^{(n+1)}$ et on trouve pour tout $x \in I$:

     $$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \frac{P_n'(x)(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}} - P_n(x) \times (-2x)\left(n+\frac{1}{2}\right)(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}}{(1-x^2)^{2n+1}} \\ &= \frac{P_n'(x)(1-x^2) + (2n+1)xP_n(x)}{(1-x^2)^{2n+1-\left(n-\frac{1}{2}\right)}} \\ &= \frac{P_n'(x)(1-x^2) + (2n+1)xP_n(x)}{(1-x^2)^{n+1}\sqrt{1-x^2}}. \end{aligned}$$

     On pose $\boxed{P_{n+1} = (1-X^2)P_n' + (2n+1)XP_n}$ (relation (R)) qui est bien un polynôme comme somme de polynômes.
     - $\star$ Cette fonction $f^{(n+1)}$ est bien continue sur I et donc f est bien de classe C^{n+1} sur I.

   Et ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
   - Conclusion : il résulte du principe de récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n tel que

   $$\forall x \in I, \quad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1-x^2)^n\sqrt{1-x^2}}.$$

3. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété : $H(n)$: P_{2n} est une fonction paire et P_{2n+1} est une fonction impaire.
   - Initialisation : pour $n = 0$. On a bien $P_0 = 1$ qui est une fonction paire, et $P_1 = X$ qui est une fonction impaire. Donc $H(0)$ est vraie.

- Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose la propriété vraie au rang n, montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$. Par hypothèse de récurrence, on sait que P_{2n} est paire et P_{2n+1} est impaire. Donc P'_{2n} est une fonction impaire et P'_{2n+1} est une fonction paire . De plus, pour tout $x \in I$, d'après la relation (R) :

$$P_{2n+2}(-x) = (1-(-x)^2)P'_{2n+1}(x)+(4n+1)(-x)P_{2n+1}(-x) = (1-x^2)P'_{2n+1}(x)+(4n+1)xP_{2n+1}(x) = P_{2n+2}(x)$$

car P_{2n+1} est impaire et P'_{2n+1} est paire. De même :

$$P_{2n+3}(-x) = (1-(-x)^2)P'_{2n+2}(x)+(4n+3)(-x)P_{2n+2}(-x) = -(1-x^2)P'_{2n+2}(x)-(4n+3)xP_{2n+2}(x) = -P_{2n+3}$$

car P_{2n+2} est paire et P'_{2n+2} est impaire. Ainsi, on a P_{2n+2} paire et P_{2n+3} impaire, et $H(n+1)$ est vraie.

Il résulte du principe de récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $H(n)$ est vraie.

4. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^\star$ la propriété : $H(n)$: $P'_n = n^2 P_{n-1}$.
   - Initialisation : pour $n = 1$. On a d'une part $P'_1 = X' = 1$ et d'autre part $1^2 P_0 = 1^2 \times 1 = 1$ donc $P'_1 = 1^2 P_0$. Donc $H(1)$ est vraie.
   - Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^\star$ fixé. On suppose la propriété vraie au rang n, montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$. D'après la question 2), on a : $P_{n+1} = (1-X^2)P'_n + (2n+1)XP_n$. Donc on a :
   $$P'_{n+1} = -2XP'_n + (1-X^2)P''_n + (2n+1)P_n + (2n+1)XP'_n.$$
   Or par hypothèse de récurrence, on sait que $P'_n = n^2 P_{n-1}$, donc $P''_n = n^2 P'_{n-1}$. On a donc :
   $$\begin{aligned} P'_{n+1} &= -2Xn^2P_{n-1} + (1-X^2)n^2P'_{n-1} + (2n+1)P_n + (2n+1)Xn^2P_{n-1} \\ &= n^2(-2XP_{n-1} + (1-X^2)P'_{n-1} + (2n+1)XP_{n-1}) + (2n+1)P_n \\ &= n^2((1-X^2)P'_{n-1} + (2n-1)XP_{n-1}) + (2n+1)P_n \\ &= n^2P_n + (2n+1)P_n \text{ d'après la relation entre } P_n \text{ et } P_{n-1} \\ &= (n+1)^2P_n. \end{aligned}$$
   Donc H_{n+1} est vraie.

   Il résulte du principe de récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $H(n)$ est vraie.
5. On remplace dans la relation (R) P'_n par n^2P_{n-1} et on obtient :
   $$P_{n+1} = (1-X^2)n^2P_{n-1} + (2n+1)XP_n,$$
   soit exactement : $\boxed{P_{n+1} = (2n+1)XP_n + n^2(1-X^2)P_{n-1}}$.