TD Fonctions de plusieurs variables - correction

Correction 1.

Déterminer le domaine de définition et de dérivabilité des fonctions suivantes, puis calculer leur dérivées partielles. En déduire l'expression du gradient.

1. $\mathbf{f(x,y) = xe^{\cos(xy)}}$: cette fonction est définie sur $\mathbb{R}^2$ comme produit et composée. De plus, les applications partielles sont dérivables sur $\mathbb{R}$ comme produit et composée de fonctions dérivables, et on a : $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (1 - xy\sin(xy))e^{\cos(xy)}}$ et $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -x^2\sin(xy)e^{\cos(xy)}}$.
2. $\mathbf{f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2-1}}$: cette fonction est définie si $x^2+y^2-1 \geq 0$, soit $x^2+y^2 \geq 1$. Le domaine de définition est donc l'extérieur du cercle de centre $(0,0)$ et de rayon 1, cercle inclus. Pour pourvoir dériver les applications partielles, il faut enlever les valeurs de (x,y) qui annulent le terme sous la racine, car la racine n'est pas dérivable en 0 : f admet donc des dérivées partielles à l'extérieur strictement du cercle de centre $(0,0)$ et de rayon 1. On a de plus : $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2-1}}}$ et $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2-1}}}$.
3. $\mathbf{f(x,y) = (x+y)\arctan\left(\frac{x+y}{x-y}\right)}$: la fonction arctan étant définie sur $\mathbb{R}$, f est définie pour tous les (x,y) tels que $x-y \neq 0 \Leftrightarrow y \neq x$, donc sur le plan $\mathbb{R}^2$ privé de la droite d'équation $y = x$. On a de plus :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \arctan\left(\dfrac{x+y}{x-y}\right) + (x+y)\dfrac{x-y-(x+y)}{(x-y)^2}\dfrac{1}{1+\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \arctan\left(\dfrac{x+y}{x-y}\right) + (x+y)\dfrac{x-y+(x+y)}{(x-y)^2}\dfrac{1}{1+\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2} \end{cases}$$

   Et donc : $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \arctan\left(\dfrac{x+y}{x-y}\right) - \dfrac{y(x+y)}{x^2+y^2}}$ et $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \arctan\left(\dfrac{x+y}{x-y}\right) + \dfrac{x(x+y)}{x^2+y^2}}$.
4. $\mathbf{f(x,y,z) = 2x^3 + 3x^2yz - 2z^5}$: f est définie et admet des dérivées partielles sur $\mathbb{R}^3$ comme fonction polynomiale. De plus, $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 6x^2 + 6xyz}$, $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 3x^2z}$ et $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 3x^2y - 10z^4}$.
5. $\mathbf{f(x,y,z) = x^{y^z}}$: on est obligé ici de passer sous forme exponentielle. On a :

$$f(x,y,z) = \exp(y^z \ln x) = \exp(\exp(z\ln y)\ln x).$$

   Le domaine de définition est donc $\mathbb{R}^{+\star} \times \mathbb{R}^{+\star} \times \mathbb{R}$. De plus, f admet des dérivées partielles sur cet ensemble comme composée de fonctions dérivables, et on a :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \dfrac{\exp(z\ln y)}{x}\exp(\exp(z\ln y)\ln x) = \dfrac{y^z}{x}x^{y^z} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \dfrac{z}{y}\exp(z\ln y)\ln x \exp(\exp(z\ln y)\ln x) = \dfrac{z}{y}y^z \ln x \times x^{y^z} \\ \dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \ln y \exp(z\ln y)\ln x \times \exp(\exp(z\ln y)\ln x) = \ln y \ln x \times y^z \times x^{y^z} \end{cases}$$

   Et donc : $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = y^z x^{y^z-1}}$, $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = zy^{z-1}\ln x \times x^{y^z}}$ et $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \ln y \ln x \times y^z \times x^{y^z}}$
   .

Correction 2.

Soit f une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

1. **Calculer les dérivées des fonctions définies par $\varphi(t) = f(\cos t, \sin t)$ et $\psi(t) = f(e^t, f(t,t))$.**
   - La fonction φ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions $\mathcal{C}^1$. De plus, on a :
   $$\varphi'(t) = \cos'(t)\frac{\partial f}{\partial x}(\cos t, \sin t) + \sin'(t)\frac{\partial f}{\partial y}(\cos t, \sin t)$$
   soit $\boxed{\varphi'(t) = -\sin t\frac{\partial f}{\partial x}(\cos t, \sin t) + \cos t\frac{\partial f}{\partial y}(\cos t, \sin t)}$.
   - La fonction ψ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions $\mathcal{C}^1$. De plus, on a :
   $$\psi'(t) = g'(t)\frac{\partial f}{\partial x}(e^t, f(t,t)) + h'(t)\frac{\partial f}{\partial y}(e^t, f(t,t)),$$
   où on a posé $g(t) = e^t$ et $h(t) = f(t,t)$. On a $g'(t) = e^t$, et pour calculer h', on applique à nouveau la formule :
   $$h'(t) = 1 \times \frac{\partial f}{\partial x}(t,t) + 1 \times \frac{\partial f}{\partial y}(t,t).$$
   On en déduit finalement : $\boxed{\varphi'(t) = e^t\frac{\partial f}{\partial x}(e^t, f(t,t)) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(t,t) + \frac{\partial f}{\partial y}(t,t)\right)\frac{\partial f}{\partial y}(e^t, f(t,t))}$.
2. **Calculer les dérivées partielles des fonctions définies par $g(x,y) = f(x+y, x-y)$ et $h(x,y) = f(x^2, y^2)$.**
   - La fonction g est définie et admet des dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2$ comme composée de fonctions $\mathcal{C}^1$. De plus, on a :
   $$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\frac{\partial f}{\partial x}(x+y, x-y) + \frac{\partial v}{\partial x}(x,y)\frac{\partial f}{\partial y}(x+y, x-y),$$
   où on a posé $u(x,y) = x+y$ et $v(x,y) = x-y$.
   On a donc : $\boxed{\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x+y, x-y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x+y, x-y)}$.
   De même, on obtient : $\boxed{\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x+y, x-y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x+y, x-y)}$.
   - La fonction h est définie et admet des dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2$ comme composée de fonctions $\mathcal{C}^1$. De plus, on a :
   $$\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\frac{\partial f}{\partial x}(x^2, y^2) + \frac{\partial v}{\partial x}(x,y)\frac{\partial f}{\partial y}(x^2, y^2),$$
   où on a posé $u(x,y) = x^2$ et $v(x,y) = y^2$.
   On a donc : $\boxed{\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 2x\frac{\partial f}{\partial x}(x^2, y^2)}$. De même, on obtient : $\boxed{\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 2y\frac{\partial f}{\partial y}(x^2, y^2)}$.
3. **Calculer les dérivées partielles de la fonction définie par $g(x,y) = \int_{2x}^{xy} f(t,t)dt$. Pour cela, on pourra introduire la fonction définie par $\varphi(t) = f(t,t)$, ainsi qu'une de ses primitives.**
   Comme indiqué dans l'énoncé, on pose : $\varphi(t) = f(t,t)$. Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions continues. Elle admet donc une primitive sur $\mathbb{R}$, que l'on note Φ. On en déduit une nouvelle expression de g : $g(x,y) = \Phi(xy) - \Phi(2x)$. Ainsi, g est bien définie sur $\mathbb{R}^2$, et admet des dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2$ comme composée de fonctions dérivables (car Φ est dérivable comme primitive de φ). De plus, on a :
   $$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = y\Phi'(xy) - 2\Phi'(2x) = yf(xy,xy) - 2f(2x,2x)$$
   $$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = x\Phi'(xy) = xf(xy,xy)$$

car $\Phi'(t) = \varphi(t) = f(t,t)$. On a donc : $\boxed{yf(xy,xy) - 2f(2x,2x)}$ et $\boxed{xf(xy,xy)}$.

Correction 3.

Déterminer les dérivées partielles d'ordres 1 et 2 des fonctions suivantes, en précisant pour chacune le domaine de validité.

1. $\mathbf{f(x,y) = x\sin(xy)}$: on a f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ comme produit et composée de fonctions $\mathcal{C}^2$. De plus :
   - $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \sin(xy) + xy\cos(xy) \quad$ et $\quad \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2\cos(xy)$
   - $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2y\cos(xy) - xy^2\sin(xy)$
   - $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -x^3\sin(xy)$
   - D'après le théorème de Schwarz, comme f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, on a : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y) = 2x\cos(xy) - x^2y\sin(xy)$.
2. $\mathbf{f(x,y) = x^y + y^x}$: on passe sous forme exponentielle, $f(x,y) = e^{y\ln x} + e^{x\ln y}$. On en déduit que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $(\mathbb{R}^{+\star})^2$ comme produit et composée de fonctions $\mathcal{C}^2$. De plus :
   - $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = yx^{y-1} + \ln y \times y^x \quad$ et $\quad \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \ln x \times x^y + xy^{x-1}$
   - $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = y(y-1)x^{y-2} + (\ln y)^2 y^x$
   - $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = (\ln x)^2 x^y + x(x-1)y^{x-2}$
   - D'après le théorème de Schwarz, comme f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, on a : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y) = x^{y-1} + y\ln x \times x^{y-1} + y^{x-1} + x\ln y \times y^{x-1} = (1+y\ln x)x^{y-1} + (1+x\ln y)y^{x-1}$.
3. $\mathbf{f(x,y,z) = \dfrac{\ln(x^2+y^2)}{z(z+1)}}$: pour que f soit définie, il faut avoir $x^2+y^2 > 0$, soit $(x,y) \neq (0,0)$, ainsi que $z \neq 0$ et $z \neq -1$. Sur ce domaine, on a f de classe $\mathcal{C}^2$ comme produit, quotient et composée de fonctions $\mathcal{C}^2$. De plus :
   - $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \dfrac{2x}{(x^2+y^2)z(z+1)}$, $\quad \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \dfrac{2y}{(x^2+y^2)z(z+1)} \quad$ et $\quad \dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = -\dfrac{(2z+1)\ln(x^2+y^2)}{z^2(z+1)^2}$.
   - $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) = \dfrac{2(x^2+y^2) - 2x\times 2x}{(x^2+y^2)^2 z(z+1)} = \dfrac{2(-x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2 z(z+1)}$
   - $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) = \dfrac{2(x^2+y^2) - 2y\times 2y}{(x^2+y^2)^2 z(z+1)} = \dfrac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2 z(z+1)}$
   - $\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z) = -\dfrac{\left[2z^2(z+1)^2 - (2z+1)\times 2(2z+1)z(z+1)\right]\ln(x^2+y^2)}{z^4(z+1)^4} = \dfrac{2(-z(z+1)+(2z+1)^2)\ln}{z^3(z+1)^3}$

   D'après le théorème de Schwarz, comme f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, on a enfin :
   - $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y,z) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y,z) = -\dfrac{4xy}{(x^2+y^2)^2 z(z+1)}$
   - $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}(x,y,z) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}(x,y,z) = -\dfrac{2x(2z+1)}{(x^2+y^2)z^2(z+1)^2}$
   - $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y,z) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y,z) = -\dfrac{2y(2z+1)}{(x^2+y^2)z^2(z+1)^2}$

. 1 Calcul d'extremum

Correction 4.

Déterminer les extremums des fonctions définies par :

1. $\mathbf{f(x,y) = x^2 + y^2 - x^3}$: cette fonction est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ comme fonction polynomiale. Cherchons ses points critiques : on doit résoudre

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) & = & 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 2x - 3x^2 & = & 0 \\ 2y & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \dfrac{2}{3} \\ y = 0 \end{array}\right.$$

La fonction possède deux points critiques : $(0,0)$ et $\left(\dfrac{2}{3},0\right)$. Regardons si ces points critiques sont des extremums. Pour cela, on étudie la fonction $h : x \mapsto x^2 - x^3$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynomiale, et on a $h'(x) = 2x - 3x^2$, donc son tableau de variations est donné par :

x	$-\infty$		0		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
h	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{27}$	$\searrow$	$-\infty$

- Point critique $(0,0)$. On a $f(0,0) = 0$. De plus, d'après le tableau des variations de h, pour tout $x \in \left]-\infty, \dfrac{2}{3}\right[$, on a $x^2 - x^3 \geq 0$. Et pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a $y^2 \geq 0$. Donc pour tout $(x,y) \in \left]-\infty, \dfrac{2}{3}\right[\times \mathbb{R}$, on a $f(x,y) \geq 0$, soit $f(x,y) \geq f(0,0)$: on a montré que $\boxed{(0,0) \text{ est un minimum local}}$. Cependant, ce n'est pas un minimum global. En effet, on a par exemple $f(2,0) = -4 < 0$.

- Point critique $\left(\dfrac{2}{3},0\right)$. On remarque que $x = \dfrac{2}{3}$ est un maximum local pour h, mais que $y = 0$ est un minimum local pour la fonction carrée : on va en déduire que l'on peut trouver des valeurs inférieures et supérieures à $f\left(\dfrac{2}{3},0\right) = \dfrac{4}{27}$ aussi proche que l'on veut du point critique. En effet, d'après le tableau des variations de h, on a $f(x,0) = x^2 - x^3 < \dfrac{4}{27}$ pour tout $x \in]0,+\infty[\setminus\{\frac{2}{3}\}$. Et on a d'autre part : $f\left(\dfrac{2}{3},y\right) = \dfrac{4}{27} + y^2 > \dfrac{4}{27}$ pour tout $y \in \mathbb{R}^\star$.

  On en déduit que $\boxed{\left(\dfrac{2}{3},0\right) \text{ n'est pas un extremum}}$.

2. $\mathbf{g(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy}$: cette fonction est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ comme fonction polynomiale. Cherchons ses points critiques : on doit résoudre

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) & = & 0 \\ \dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 3x^2 - 3y & = & 0 \\ 3y^2 - 3x & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} y & = & x^2 \\ x^4 - x & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} y & = & x^2 \\ x(x-1)(x^2+x+1) & = & 0 \end{array}\right.$$

De plus, X^2+X+1 n'admet aucune racine réelle. La fonction possède donc deux points critiques : $(0,0)$ et $(1,1)$. Regardons si ces points critiques sont des extremums.

- Point critique $(0,0)$. On a $g(0,0)=0$. De plus, pour tout $x\in]-\infty,0[$, on a $g(x,0)=x^3<0$ et pour tout $x\in]0,+\infty[$, on a $g(x,0)=x^3>0$. Donc $\boxed{(0,0) \text{ n'est pas un extremum}}$.
- Point critique $(1,1)$. C'est moins évident ici. On a $g(1,1)=-1$, et on va montrer que ce point est un minimum local. Pour cela, on calcule, pour $(h,k)\in\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} g(1+h,1+k) &= (1+h)^3+(1+k)^3-3(1+h)(1+k) \\ &= 1+3h+3h^2+h^3+1+3k+3k^2+k^3-3(1+h+k+hk) \\ &= -1+3h^2-3hk+3k^2+h^3+k^3 \end{aligned}$$

Montrons que $3h^2-3hk+3k^2+h^3+k^3\geq 0$ pour (h,k) assez petits. On a, en mettant sous forme canonique le début :

$$3h^2-3hk+3k^2+h^3+k^3=3\left(h-\frac{k}{2}\right)^2-\frac{3}{4}k^2+3k^2+h^3+k^3=3\left(h-\frac{k}{2}\right)^2+\frac{9}{4}k^2+h^3+k^3.$$

De plus, $3\left(h-\frac{k}{2}\right)^2+\frac{9}{4}k^2>0$ dès que $k\neq 0$, et h^3+k^3 est négligeable devant $3\left(h-\frac{k}{2}\right)^2+\frac{9}{4}k^2$ lorsque h et k tendent vers 0. Donc on a bien $g(1+h,1+k)\geq g(1,1)$ lorsque h et k sont proches de 0 : donc $\boxed{(1,1) \text{ est un minimum local}}$. Cependant, ce n'est pas un minimum global. En effet, on a par exemple $g(-2,0)=-8<-1$.

Correction 5.

On considère la fonction définie par $f(x,y)=x^3+xy+y^3$.

1. **Montrer que f admet deux points critiques.**
On doit résoudre :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) &=& 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) &=& 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 3x^2+y &=& 0 \\ x+3y^2 &=& 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} y &=& -3x^2 \\ x+27x^4 &=& 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} y &=& -3x^2 \\ x(1+27x^3) &=& 0 \end{array}\right.$$

La fonction possède donc deux points critiques : $\boxed{(0,0) \text{ et } \left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)}$.

2. **Montrer que le point critique d'abscisse 0 n'est pas un extremum local de f.**
On a $f(0,0)=0$. De plus, pour tout $x\in]-\infty,0[$, on a $f(x,0)=x^3<0$ et pour tout $x\in]0,+\infty[$, on a $f(x,0)=x^3>0$. Donc $\boxed{(0,0) \text{ n'est pas un extremum}}$.

3. **Le but de cette question est de montrer que f admet en $\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)$ un maximum local. On considère pour cela la fonction définie par $g(h,k)=f\left(-\frac{1}{3}+h,-\frac{1}{3}+k\right)$.**

   (a) **Montrer que pour tout $(h,k)\in\mathbb{R}^2$, on a : $hk\leq\frac{h^2+k^2}{2}$.**
   On a :
   $$hk\leq\frac{h^2+k^2}{2} \Leftrightarrow h^2+k^2-2hk\geq 0 \Leftrightarrow (h-k)^2\geq 0$$
   ce qui est toujours vrai. Donc pour tout $(h,k)\in\mathbb{R}^2$, on a : $\boxed{hk\leq\frac{h^2+k^2}{2}}$.

   (b) **En déduire que pour tout $(h,k)\in\mathbb{R}^2$, on a : $g(h,k)-g(0,0)\leq -h^2\left(\frac{1}{2}-h\right)-k^2\left(\frac{1}{2}-k\right)$.**

On remplace avec l'expression de g :

$$\begin{aligned}
g(h,k)-g(0,0) &= f\left(-\frac{1}{3}+h,-\frac{1}{3}+k\right)-f\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)\\
&= \left(-\frac{1}{3}+h\right)^3+\left(-\frac{1}{3}+h\right)\left(-\frac{1}{3}+k\right)+\left(-\frac{1}{3}+k\right)^3-\frac{1}{27}\\
&= -\frac{1}{27}+\frac{h}{3}-h^2+h^3+\frac{1}{9}-\frac{h}{3}-\frac{k}{3}+hk-\frac{1}{27}+\frac{k}{3}-k^2+k^3-\frac{1}{27}\\
&= -h^2+h^3+hk-k^2+k^3
\end{aligned}$$

Puis en utilisant la question précédente :

$$\begin{aligned}
g(h,k)-g(0,0) &\leq -h^2+h^3+\frac{h^2+k^2}{2}-k^2+k^3\\
&\leq -\frac{h^2}{2}+h^3-\frac{k^2}{2}+k^3\\
&\leq -h^2\left(\frac{1}{2}-h\right)-k^2\left(\frac{1}{2}-k\right)
\end{aligned}$$

(c) **En déduire que g admet un maximum local en $(0,0)$, puis que f admet un maximum local en $\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)$.**

Quand h et k sont proches de 0, on a : $-h^2\left(\frac{1}{2}-h\right)-k^2\left(\frac{1}{2}-k\right)\leq 0$, donc $g(h,k)\leq g(0,0)$: $\boxed{g \text{ admet un maximum local en } (0,0)}$.

On en déduit que $f(x,y)\leq f\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)$ lorsque (x,y) est proche de $\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)$, donc $\boxed{f \text{ admet un maximum local en } \left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)}$.

(d) **Ce maximum est-il global ?**

Ce maximum n'est pas global, par exemple, on a $f(2,0)=8>f\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)$.

. 2 Utilisation des fonctions de plusieurs variables

Correction 6.

Le but de cet exercice est de déterminer l'ensemble des fonctions f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ telles que : $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ 3\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)-2\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0$. On suppose que f est une solution. On pose alors : $g:\begin{pmatrix}\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}\\ (u,v) & \mapsto & f(3u-v,-2u+v)\end{pmatrix}$

1. **Montrer que $\forall (u,v)\in\mathbb{R}^2,\ \frac{\partial g}{\partial u}(u,v)=0$, et en déduire qu'il existe une fonction ψ de $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telle que $\forall (u,v)\in\mathbb{R}^2, g(u,v)=\psi(v)$.**
On remarque tout d'abord que g est $\mathcal{C}^1$ comme composée de fonctions $\mathcal{C}^1$. Calculons sa dérivée partielle par rapport à u :
$$\frac{\partial g}{\partial u}(u,v)=\frac{\partial h}{\partial u}(u,v)\frac{\partial f}{\partial x}(3u-v,-2u+v)+\frac{\partial k}{\partial u}(u,v)\frac{\partial f}{\partial y}(3u-v,-2u+v),$$
où on a posé : $h(u,v)=3u-v$ et $k(u,v)=-2u+v$. On en déduit :
$$\frac{\partial g}{\partial u}(u,v)=3\frac{\partial f}{\partial x}(3u-v,-2u+v)-2\frac{\partial f}{\partial y}(3u-v,-2u+v)=0$$

d'après l'énoncé. Donc $\boxed{\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2,\ \dfrac{\partial g}{\partial u}(u,v) = 0}$.

On en déduit que g ne dépend que de la variable v : il existe une fonction ψ telle que $\boxed{\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2, g(u,v) = \psi(v}$
Comme g est de classe $\mathcal{C}^1$, ψ est également de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

2. **Montrer que l'application** $\varphi : \begin{pmatrix} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (u,v) & \mapsto & (3u-v, -2u+v) \end{pmatrix}$ **est bijective, et déterminer sa bijection réciproque.**
Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on résout $\varphi(u,v) = (x,y)$, soit :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 3u - v & = & x \\ -2u + v & = & y \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 3u - v & = & x \\ u & = & x + y \quad L_2 \leftarrow L_1 + L_2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} v & = & 2x + 3y \\ u & = & x + y \end{array} \right.$$

Le système admet une unique solution dans $\mathbb{R}^2$, donc φ est bien bijective, et on a $\boxed{\varphi^{-1}(x,y) = (x+y, 2x+3y)}$

3. **Exprimer f en fonction de ψ et conclure.** On a montré que $\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$g(u,v) = \psi(v) \ \Leftrightarrow\ f(3u-v, -2u+v) = \psi(v) \ \Leftrightarrow\ f(\varphi(u,v)) = \psi(v).$$

On a de plus : $(x,y) = \varphi(u,v) \ \Leftrightarrow\ (u,v) = \varphi^{-1}(x,y)$, soit, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\boxed{f(x,y) = \psi(2x+3y)}.$$

L'ensemble des solutions est donc : $\{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2), \exists \psi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}), \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = \psi(2x+3y)\}$.