Correction TD 7 : Logique et Ensemble

I Raisonnements : implication, équivalence

Correction 1. Étude de chaque propriété :

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : $\boxed{x^2 = 4 \Leftarrow x = 2.}$
   Le sens réciproque est vrai par passage au carré.
   En revanche le sens direct est faux. Contre-exemple : $x = -2$ vérifie $x^2 = 4$ et $x \neq 2$.
2. Soit $z \in C$. On a : $\boxed{z = -\overline{z} \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}}$.
   On raisonne par double implication comme l'exemple du cours. Soit $z \in C$: on pose $z = a + ib$, avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
   - Montrons que $z = -\overline{z} \Rightarrow z \in i\mathbb{R}$.
     On a $\overline{z} = a - ib$, donc $z = -\overline{z} \Rightarrow a + ib = -(a - ib) \Rightarrow 2a = 0 \Rightarrow a = 0$. On en deduit bien que $z \in i\mathbb{R}$.
   - Montrons que $z = -\overline{z} \Leftarrow z \in i\mathbb{R}$.
     Si $z \in i\mathbb{R}$, on a $a = 0$, soit $z = ib$. Donc $-\overline{z} = -(-ib) = ib = z$. Donc on a bien $z = -\overline{z}$.

   Conclusion : on a montré par double implication que $\boxed{z = -\overline{z} \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}}$.
3. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : $\boxed{x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow e^{4ix} = 1}$.
   Le sens direct est vrai, car $e^{4i\frac{\pi}{2}} = e^{2i\pi} = 1$.
   Le sens réciproque est faux, prendre par exemple $x = 0$.

Correction 2. On a $\boxed{A \Rightarrow B}$: en effet, si m et n sont pairs, alors il existe k et k' entiers tels que $m = 2k$ et $n = 2k'$. On a donc $m + n = 2k + 2k' = 2(k + k')$, ce qui implique $m + n$ pair.
Le sens réciproque est faux, $\boxed{B \text{ n'implique pas } A}$. Pour contre exemple on peut choisir $m = 3$ et $n = 5$. On a $3 + 5 = 8$: 8 est pair alors que 3 et 5 sont impairs.
On en déduit donc que $\boxed{\text{l'équivalence est fausse}}$.

Correction 3. On montre l'équivalence par double implication. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}$.

- Etude du sens réciproque.
  On suppose que $x = 0$ et $y = 0$. On a alors $x^2 + y^2 = 0^2 + 0^2 = 0$.
  Ainsi, on a montré que $\big((x = 0 \text{ et } y = 0) \Rightarrow (x^2 + y^2 = 0)\big)$.
- Etude du sens direct.
  On raisonne par contraposée.
  On suppose que $x \neq 0$ ou $y \neq 0$.
  - Cas 1 : si $x \neq 0$. Alors $x^2 > 0$, et de plus $y^2 \geq 0$. Donc par somme $x^2 + y^2 > 0$, et donc $x^2 + y^2 \neq 0$.
  - Cas 2 : si $y \neq 0$. Le même raisonnement donne $x^2 + y^2 \neq 0$.

  Ainsi, par contraposée, on a montré que $(x^2 + y^2 = 0) \Rightarrow (x = 0 \text{ et } y = 0)$.

Conclusion : On a bien démontré que $\boxed{\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (x^2 + y^2 = 0) \Rightarrow (x = 0 \text{ et } y = 0)}$.

Correction 4. On cherche à montrer que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ \ (x + y > 2 \Rightarrow x > 1 \text{ ou } y > 1)$.
Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
Par contraposée, on suppose que $x \leq 1$ et $y \leq 1$. Par propriété sur les inégalités, on peut additionner

terme à terme les inégalités, on obtient ainsi $x+y \leq 2$. Donc non$(x+y>2)$ est vérifiée.
Conclusion : Par contraposée, on a bien démontré que $\boxed{(x+y>2) \Rightarrow (x>1 \text{ ou } y>1)}$.

Correction 5. Soit $x \in \mathbb{R}^+$.
Pour montrer que la propriété P est vraie, on raisonne par contraposée.
On suppose donc que $x \neq 0$, c'est-à-dire $x>0$. On cherche alors à vérifier que : $\exists \varepsilon > 0$ tel que $x > \varepsilon$.
En faisant un dessin, on remarque qu'il suffit de prendre (par exemple) $\varepsilon = \frac{x}{2}$. En effet, on a alors bien $\varepsilon > 0$ car $x>0$ et $x > \frac{x}{2}$ (car $x>0$) donc on a aussi $x > \varepsilon$.
Conclusion : Par contraposée, $\boxed{\text{on a bien démontré la propriété } P}$.

II Logique et quantificateur

Correction 6. Étude de chaque assertion :

1. Faux, on peut prendre comme contre exemple $x=-1$.
   Négation : $\exists x \in \mathbb{R},\ x<0$.
2. Vrai, on peut prendre par exemple $y=1$.
   Négation : $\forall y \in \mathbb{R},\ y<0$.
3. Vrai : soit $x \in \mathbb{R}^+$. Comme x est positif, on peut poser $y=\sqrt{x}$. On a bien alors $y^2=x$. On remarque que l'on peut également prendre $y=-\sqrt{x}$.
   Négation : $\exists x \in \mathbb{R}^+,\ \forall y \in \mathbb{R},\ x \neq y^2$.
4. Faux : soit $y \in \mathbb{R}$ quelconque. On cherche un réel x tel que $x \neq y^2$. Il suffit de prendre par exemple $x=y^2+1$. On a bien alors $x \neq y^2$.
   Remarquons que les deux propriétés 3. et 4. diffèrent seulement par l'ordre dans lequel on a défini x et y.
   Négation : $\forall y \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R}^+,\ x \neq y^2$.
5. Faux : soit $x \in \mathbb{R}^+$ quelconque. Si pour tout réel y on avait $x=y^2$, alors en particulier, pour $y=0$ on aurait $x=0$, et pour $y=1$ on aurait $x=1$. Ceci est absurde.
   Négation : $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \exists y \in \mathbb{R},\ x \neq y^2$.
6. Faux : soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. On cherche y tel que $x+y>0$ est faux. Il suffit pour cela de prendre y tel que $x+y \leq 0$ c'est-à-dire $y \leq -x$. Prenons par exemple $y=-x-1$. On a alors $x+y=-1 \leq 0$. Donc on a bien un contre-exemple.
   Négation : $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x+y \leq 0$.
7. Vrai : soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. On cherche y tel que $x+y>0$, c'est-à-dire $y>-x$. Prenons par exemple $y=-x+1$. On a bien alors $x+y=1>0$.
   Négation : $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x+y \leq 0$.
8. Faux : on peut prendre comme contre-exemple $x=-1$ et $y=-2$. Alors $x+y=-3<0$.
   Négation : $\exists x \in \mathbb{R}, {}_{\exists}\, y \in \mathbb{R},\ x+y \leq 0$.

Correction 7. Étude de chaque propriété :

1. $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2\ \ (a \leq b \Rightarrow f(a) \leq f(b))$
   Négation : $\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ a \leq b$ et $f(a) > f(b)$.
2. $\exists x \in \mathbb{R}^+,\ f(x) \geq 0$
   Négation : $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ f(x) < 0$.
3. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = f(x)$
   Négation : $\exists x \in \mathbb{R},\ f(-x) \neq f(x)$.
4. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 0$
   Négation : $\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$.
5. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leq g(x)$
   Négation : $\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) > g(x)$.
6. $\exists T \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x+T) = f(x)$
   Négation : $\forall T \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R},\ f(x+T) \neq f(x)$.

Correction 8.

1. L'inégalité $1 \leq x < y$ correspond à $1 \leq x$ et $x < y$. Or la négation de (A et B) est (non A) ou (non B). Ainsi ici on obtient : $\boxed{x < 1 \text{ ou } x \geq y.}$
2. La négation de $P \Rightarrow Q$ est (P et (non Q)). Ainsi ici on obtient : $\boxed{x^2 = 1 \text{ et } x \neq 1.}$
3. La négation est : $\boxed{\exists x \in E,\ \exists x' \in E' : x \neq x' \text{ et } f(x) = f(x')\ .}$

III Ensembles

Correction 9.

1.

$$\begin{aligned} E &= \{z \in \mathbb{C} \,|\, Re(z) \geq 0\} \\ &= \{x + iy \,|\, x \in \mathbb{R}_+, y \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

2. Soit $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\, 2x + y = 1\}$ et $B = \{(x, 1 - 2x), x \in \mathbb{R}\}$.
Soit $a \in A$, alors il existe $(x; y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a = (x, y)$ et vérifiant $2x + y = 1$. Donc $y = 1 - 2x$. Ainsi $a = (x, 1 - 2x)$ donc $a \in B$ et finalement

$$\boxed{A \subset B}$$

Réciproquement si $b \in B$, il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $b = (x, 1 - 2x)$, en notant $y = 1 - 2x$ on a $b = (x, y)$ et $2x + y = 2x + (1 - 2x) = 1$ donc $b \in A$

$$\boxed{B \subset A}$$

Par double inclusion on a :

$$\boxed{A = B}$$

Correction 10.

Montrons par double inclusion que $A\Delta B = (A\backslash B) \cup (B\backslash A)$.

- Montrons que $A\Delta B \subset (A\backslash B) \cup (B\backslash A)$: soit $x \in A\Delta B$, montrons que $x \in (A\backslash B) \cup (B\backslash A)$.
Par définition, $A\Delta B = (A \cup B)\backslash(A \cap B)$ donc $x \in A \cup B$, et $x \notin A \cap B$. On fait deux cas :
  - ⋆ Cas 1 : si $x \in A$. On sait que $x \notin A \cap B$, donc nécessairement $x \notin B$. Donc on a $x \in A\backslash B$, et donc $x \in (A\backslash B) \cup (B\backslash A)$.
  - ⋆ Cas 2 : si $x \in B$. On montre de même que $x \in (A\backslash B) \cup (B\backslash A)$.

  On a donc bien $A\Delta B \subset (A\backslash B) \cup (B\backslash A)$.
- Montrons que $(A\backslash B) \cup (B\backslash A) \subset A\Delta B$: soit $x \in (A\backslash B) \cup (B\backslash A)$, montrons que $x \in A\Delta B$. On fait à nouveau deux cas :
  - ⋆ Cas 1 : si $x \in A\backslash B$. On sait que $x \in A$, donc $x \in A \cup B$. De plus, on a $x \notin B$, donc $x \notin A \cap B$. Donc $x \in (A \cup B)\backslash(A \cap B)$, c'est-à-dire $x \in A\Delta B$
  - ⋆ Cas 2 : si $x \in B\backslash A$. On montre de même que $x \in A\Delta B$.

  On a donc bien $(A\backslash B) \cup (B\backslash A) \subset A\Delta B$

Par double inclusion, on a bien montré que $\boxed{A\Delta B = (A\backslash B)\cup(B\backslash A)}$.
Pour montrer la deuxième égalité, on utilise le fait que $A\backslash B = A\cap\overline{B}$, et $B\backslash A = B\cap\overline{A}$.

Correction 11. On montre l'équivalence par double implication.

- On commence par montrer que $A = B \Rightarrow A\cup B = A\cap B$.
  On suppose que $A = B$. On a donc $A\cup B = A = B$ et $A\cap B = A = B$, donc $A\cup B = A\cap B$.

- On montre ensuite le sens réciproque : $A\cup B = A\cap B \Rightarrow A = B$.
  On suppose que $A\cup B = A\cap B$ et on montre que $A = B$ par double inclusion.
  - ⋆ Montrons que $A\subset B$: soit $x\in A$, montrons que $x\in B$.
    Comme $x\in A$, $x\in A\cup B$. Or $A\cup B = A\cap B$, donc $x\in A\cap B$. Donc $x\in B$, et ainsi $A\subset B$.
  - ⋆ Les rôles de A et B étant symétriques, le même raisonnement permet de montrer que $B\subset A$.

  Ainsi, par double inclusion, on a bien $A = B$.

Conclusion : on a bien démontré par double implication que $\boxed{A = B \Leftrightarrow A\cup B = A\cap B}$.

Correction 12. Soit $(A,B,C)\in\mathcal{P}(E)^3$.
Montrons par contraposée que : $(A\cap B = A\cap C$ et $A\cup B = A\cup C) \Rightarrow B = C$.
On suppose donc que $B\neq C$, à savoir soit qu'il existe un élément d'un ensemble qui n'est pas dans l'autre. Comme B et C jouent des rôles symétrique, on peut supposer par exemple qu'il existe $x\in B$ tel que $x\notin C$.
On cherche à montrer que $A\cap B\neq A\cap C$ ou $A\cup B\neq A\cup C$. On doit étudier deux cas :

- Si $x\in A$: on a alors $x\in A$ et $x\in B$ donc $x\in A\cap B$. Or $x\notin C$, donc $x\notin A\cap C$. Donc : $A\cap B\neq A\cap C$.
- Soit $x\notin A$: on a alors $x\in A\cup B$ car $x\in B$. Par contre $x\notin A\cup C$ car $x\notin A$ et $x\notin C$. Donc : $A\cup B\neq A\cup C$.

On a bien montré dans les deux cas que l'on avait : $A\cap B\neq A\cap C$ ou $A\cup B\neq A\cup C$.
Par contraposée, on a donc montré que : $\boxed{(A\cap B = A\cap C \text{ et } A\cup B = A\cup C) \Rightarrow B = C}$.

Correction 13. On doit montrer une équivalence, on raisonne donc par double implication.

- On commence par exemple par supposer que $B\subset A\subset C$. Montrons que $A\cup B = A\cap C$.
  Comme $B\subset A$, on a : $A\cup B = A$ (faire un dessin pour le voir). De même, comme $A\subset C$, on a : $A\cap C = A$. Ainsi, on a : $A\cup B = A = A\cap C$. Ainsi on a montré l'implication directe.
- On suppose alors que $A\cup B = A\cap C$. Montrons que $B\subset A\subset C$:
  - ⋆ On montre d'abord que $B\subset A$:
    Soit $x\in B$. Comme $x\in B$, en particulier $x\in A\cup B$. Mais par hypothèse, on sait que $A\cup B = A\cap C$ ainsi on a : $x\in A\cap C$. Donc $x\in C$ et $x\in A$. En particulier, on a bien que $x\in A$.
    On a bien montré que $B\subset A$.
  - ⋆ On montre ensuite que $A\subset C$:
    Soit $x\in A$. Comme $x\in A$, en particulier $x\in A\cup B$. Mais par hypothèse, on sait que $A\cup B = A\cap C$ ainsi on a : $x\in A\cap C$. Donc $x\in C$ et $x\in A$. En particulier, on a bien que $x\in C$.
    On a bien montré que $A\subset C$.

  Ainsi on a montré que $B\subset A\subset C$ et on a démontré l'implication réciproque.

Par double implication, on a bien montré que $\boxed{(A\cup B = A\cap C) \Leftrightarrow B\subset A\subset C.}$.

Correction 14.

- Pour représenter graphiquement l'ensemble B, il suffit de remarquer que $(x, y) \in B$ équivaut à :

$$\left\{\begin{array}{lcl} 3x+y+2 & \geq & 0 \\ x+2y+4 & \geq & 0 \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{lcl} 3x+y+2 & \leq & 0 \\ x+2y+4 & \leq & 0 \end{array}\right.$$

Ainsi, on a des intersections de demi-plans à représenter.

- Montrons que $A \subset B$: soit $(x, y) \in A$, montrons que $(x, y) \in B$. Par définition de l'ensemble A, on sait que $y = x - 2$. Pour montrer que $(x, y) \in B$, vérifions que : $(3x + y + 2)(x + 2y + 4) \geq 0$. On a :

$$(3x+y+2)(x+2y+4) = (3x+x-2+2)(x+2x-4+4) = 4x \times 3x = 12x^2 \geq 0.$$

Ainsi on a bien que $(x, y) \in B$ et on vient de montrer que $\boxed{A \subset B}$.

- On veut montrer que l'on n'a pas égalité. Il suffit de trouver un couple $(x, y) \in B$ tel que $(x, y) \notin A$. Par exemple $(1, 0)$ est bien dans l'ensemble B mais il n'est pas dans l'ensemble A.

Correction 15.

1. Soit $E = \{1\}$. On a $\boxed{\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{1\}\}}$. Puis, on obtient : $\boxed{\mathcal{P}(\mathcal{P}(E)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{1\}, \{1, \emptyset\}\}}$.
2. $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, \{a, b$
3. Soit $E = \{a, b\}$. On a : $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$. Puis

$$\mathcal{P}(\mathcal{P}(E)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{a\}\}, \{\{b\}\}, \{\{a, b\}\}, \{\{\emptyset\}, \{a\}\}, \{\{\emptyset\}, \{b\}\}, \{\{\emptyset\}, \{a, b\}\}, \{\{a\}, \{b\}\}, \{\{a\}, \{a, b\}\},$$
$$\{\{b\}, \{a, b\}\}, \{\{\emptyset\}, \{a\}, \{b\}\}, \{\{\emptyset\}, \{a\}, \{a, b\}\}, \{\{\emptyset\}, \{b\}, \{a, b\}\}, \{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}, \{\{\emptyset\}, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}, \}$$