Table des matières

Chapitre 19 : derivation

Dans tout ce chapitre, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point.

I Définitions et première propriétés

Définition 1. Taux d'accroissement :
Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. Pour tout $x \in I$ avec $x \neq x_0$, on appelle taux d'accroissement de f entre x et x_0 le quotient :

$\tau_{f,x_0}(x) =$. . . . .

Définition 2. Dérivabilité d'une fonction en un point :
Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$.

- On dit que f est dérivable en x_0 si . . . .

  . . . .

- Si cette limite existe, elle est notée . et est appelée le nombre dérivée de f en x_0 :

Remarque changement de variable $(f(x_0 + h) - f(x_0))/h$

Exercice 3.

1. Étudier la dérivabilité de la fonction valeur absolue en 0.
2. Étudier la dérivabilité en 0 de la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$
3. Étudier la dérivabilité en 0 de la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} e^{x} & \text{si } x \geq 0 \\ \dfrac{\sin x}{x} & \text{si } x < 0. \end{cases}$

Proposition 4. Tangente :
Si la fonction f est dérivable en x_0 alors la courbe $\mathcal{C}_f$ admet au point d'abscisse x_0 une tangente qui a pour équation : . . . .

Proposition 5. Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. Si f est dérivable en x_0 alors elle est continue.

⚠ La réciproque est fausse

Définition 6. Dérivabilité d'une fonction sur un intervalle :

- La fonction f est dérivable sur l'intervalle I si elle ....
- On appelle alors fonction dérivée de f et on note f' la fonction qui à tout x de I associe $f'(x)$.

II Composition et réciproque

Proposition 7. Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$.
Si f est dérivable sur I, g est dérivable sur J et .... alors :

- $g \circ f$ est dérivable sur ....
- ....

Théorème 8. Théorème de dérivabilité d'une fonction réciproque :
Soit $f : I \to J$ une fonction bijective de I dans J. Elle admet ainsi une fonction réciproque $f^{-1} : J \to I$.
Si :

- f est de classe $\mathcal{C}^n(I)$
- $f'(x) \neq 0$ for all $x \in I$

Alors $f^{-1} \in \mathcal{C}^n(J)$ et $\forall y \in J,\ (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(y)}$

Méthode pour étudier la dérivabilité d'une réciproque :

- On justifie que f est dérivable sur un intervalle et on calcule la dérivée f' de f.
- On détermine tous les points x_0 où f' s'annule : cela nous donne l'intervalle I qui permet d'appliquer le théorème.
- On calcule tous les $y_0 = f(x_0)$ correspondants : cela nous donne tous les points à enlever et on connaît ainsi l'intervalle J sur lequel f^{-1} va être dérivable.
- On applique le théorème en commençant par énoncer les deux hypothèses.
  On sait alors que f^{-1} est dérivable sur l'intervalle J, et que $\forall y \in J,\ (f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))}$.

Exemples.

- Étudier la dérivabilité et calculer la dérivée de la fonction arctangente.
- Étudier la dérivabilité et calculer la dérivée de la fonction racine n-ième.
  - ⋆ Cas où n est pair :
  - ⋆ Cas où n est impair :

III Théorèmes utilisant la dérivabilité sur un intervalle

III. 1 Théorème des accroissements finis

Théorème 9 (Rolle)**.** Soient a, b deux réels tels que $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Si :

- f est continue sur $[a, b]$
- f est dérivable sur $]a, b[$
- $f(a) = f(b)$

Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$

Quand penser au théorème de Rolle :

- Type d'exercices : Exercices plutôt théoriques lorsque l'on ne connaît pas l'expression de la fonction.
- Y penser dès que l'on veut déterminer l'existence de racines pour la dérivée ou les dérivées successives d'un polynôme.
- Y penser dès que l'on parle de valeurs d'annulation pour la dérivée ou les dérivées successives d'une fonction.

Exercice 10. Soit P un polynôme ayant deux racines réelles distinctes. Montrer que P' admet au moins une racine.

Théorème 11 (Théorème des accroissements finis)**.** Soient a, b deux réels tels que $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction. Si :

- f continue sur $[a, b]$
- f dérivable sur $]a, b[$

Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Démonstration. Rolle sur $g(x) = f(x) - f(a) - \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)(x - a)$ □

Exercice 12. Lorsque la dérivée de la fonction est bornée, le théorème des accroissements finis permet de montrer des inégalités appelées "inégalités des accroissements finis". On considère une fonction f continue sur un intervalle $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.

1. Montrer que s'il existe $(m, M) \in \mathbb{R}^2$ tels que : $\forall x \in]a, b[,\ m \leq f'(x) \leq M$, alors : $m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a)$.
2. Montrer que s'il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in]a, b[,\ |f'(x)| \leq K$, alors : $|f(b) - f(a)| \leq K|b - a|$.

Applications

— **Obtenir des inégalités :**

- On fixe un réel x.
- On applique le TAF à une fonction sur un intervalle de type $[0, x]$, $[x, x + 1]$, $[1, x]$...
- On encadre alors la dérivée de la fonction afin d'obtenir l'encadrement cherché.

Exercice 13. Montrer les inégalités suivantes :

1. Montrer que pour tout $x > 0$: $x < e^x - 1 < xe^x$.
2. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad |\sin x| \leq |x| \quad$ et $\quad |\cos x - 1| \leq |x|$.
3. Montrer que pour tout $x > 0$, on a $\dfrac{x}{1+x} < \ln(1 + x) < x$.

— **Obtenir la convergence de suite définie par récurrence**

- Penser au TAF pour montrer que : $|u_{n+1} - \alpha| \leq C\,|u_n - \alpha|$ avec α point fixe de la fonction f associée à la suite, lorsque l'on sait que la dérivée f' est bornée.
- Appliquer alors le TAF à la fonction f entre u_n et α.

Exercice 14. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie par $f(x) = \frac{1}{2}\sin x + 1$.

1. Montrer que f a un unique point fixe que l'on notera α.
2. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$.
3. Conclure quand à la convergence de la suite.

Exercice 15. Soit $f :]-2, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction définie par $f(x) = \ln(2+x)$.

1. Étudier la fonction f et montrer que f a un unique point fixe dans $[1, 2]$ que l'on notera α.
2. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.
3. Montrer que la suite est bien définie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $1 \leq u_n \leq 2$.
4. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{3}|u_n - \alpha|$ et conclure quant à la convergence de la suite.

III. 2 Dérivées successives

Proposition 16. Produit de deux fonctions :
Si f et g sont deux fonctions de classe C^n alors ....

Exercice 17. La formule de la dérivée d'un produit, appelée "formule de Leibniz" n'est pas au programme. Il faut savoir la démontrer pour pouvoir l'utiliser.

1. Montrer que si f et g sont de classe C^n, alors $(fg)^{(n)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$.
2. En déduire les dérivées successives des fonctions suivantes : $f : x \mapsto x^3 e^{-4x}$, $g : x \mapsto x^4 \sin(x)$ et $h : x \mapsto \dfrac{x^2}{4-x}$.