Table des matières

I Généralités **1**
- I. 1 Définitions, notations . . . 1
- I. 2 Représentation graphique . . . 1
- I. 3 Applications partielles . . . 2
- I. 4 Lignes de niveau . . . 2

II Limite et continuité **2**
- II. 1 Limite . . . 2
- II. 2 Continuité . . . 3

III Dérivabilité **4**
- III. 1 Dérivées partielles . . . 4
- III. 2 Fonctions $\mathcal{C}^1$ . . . 5
- III. 3 Extrema . . . 7
- III. 4 Dérivées partielles d'ordre 2 . . . 9

Chapitre : Fonction à plusieurs variables

I Généralités

I. 1 Définitions, notations

Définition 1. On appelle fonction réelle de deux variables réelles toute fonction dont le domaine de départ est inclus dans $\mathbb{R}^2$ et le domaine d'arrivée est inclus dans $\mathbb{R}$:

$$f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

Définition 2. Le domaine de définition d'une fonction réelle de deux variables réelles est l'ensemble des $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $f(x, y)$ est bien défini.

Exercice 3. Donner et représenter dans $\mathbb{R}^2$ le domaine de définition des fonctions définies par :

1. $f(x, y) = e^{x-2y}$
2. $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$
3. $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$
4. $f(x, y) = \dfrac{3x^2 + y^3}{x^2 - y^2}$

I. 2 Représentation graphique

On peut généraliser la notion de courbe représentative aux fonctions de deux variables. Cependant, on doit représenter l'ensemble des $f(x, y)$ pour tous $(x, y) \in \mathcal{D}_f$: on obtient non plus une courbe, mais une surface.

Définition 4. Soit f une fonction réelle de deux variables réelles définie sur son domaine de définition $\mathcal{D}_f$. On appelle surface représentative (ou graphe) de f l'ensemble :

$$\{(x, y, f(x, y)) \,|\, (x, y) \in \mathcal{D}_f\}$$

Exemple. Les surfaces représentatives des fonctions définies par $f(x,y) = x^2+y^2$ et $g(x,y) = \ln(x^2+1)$ sont données par :

I. 3 Applications partielles

> **Définition 5.** Soit f une fonction réelle de deux variables réelles. On suppose que son domaine de définition s'écrit $\mathcal{D}_f = \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2$, avec $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$. Pour tout $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2$, on appelle applications partielles de f en (x_0, y_0) les fonctions :

Exemple. Déterminer les applications partielles des fonctions f et g définies dans l'exemple précédent.

> **Proposition 6.** Soit f une fonction réelle de deux variables réelles de domaine de définition $\mathcal{D}_f = \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2$. Pour tout $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2$:
>
> - la courbe représentative de $f(., y_0)$ est obtenue en interectant le graphe de f avec le plan d'équation $y = y_0$
> - la courbe représentative de $f(x_0, .)$ est obtenue ....
>
>   ....

Exemple. Représenter les courbes des applications partielles $f(., 0.5)$, $f(0.5, .)$, $g(., 0.5)$ et $g(0.5, .)$ où f et g sont définies dans l'exemple précédent.

Remarque. Il est souvent intéressant d'étudier d'abord l'allure des courbes des applications partielles pour en déduire la surface représentative de f.

I. 4 Lignes de niveau

Comme on l'a vu plus haut, il n'est pas toujours évident de dessiner la surface représentative d'une fonction de deux variables. On a souvent recours aux lignes de niveau pour visualiser l'allure de f.

> **Définition 7.** Soit f une fonction réelle de deux variables réelles. On appelle ligne de niveau associée à f tout ensemble de la forme
>
> $$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = a\}$$
>
> avec $a \in \mathbb{R}$.

Exemple. Les lignes de niveau sont utilisées dans de très nombreux domaines. Par exemple, en cartographie, on trace les lignes de niveau correspondant à l'altitude. En météorologie, on trace souvent les lignes isobares, c'est-à-dire les lignes correspondant à une pression constante.

II Limite et continuité

II. 1 Limite

On cherche ici à généraliser la notion de limite vue pour les fonctions d'une variable. Intuitivement, on dira qu'une fonction de deux variables admet pour limite ℓ en (x_0, y_0) si ....

Il est possible de donner une définition formelle, même si celle-ci n'est pas au programme :

Définition 8. Soit f une fonction réelle de deux variables réelles, définie au voisinage de (x_0, y_0). On dit que $f(x,y)$ tend vers ℓ quand (x,y) tend vers (x_0,y_0) lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0 \text{ tel que : } (|x - x_0| < \delta \text{ et } |y - y_0| < \delta) \Rightarrow |f(x,y) - \ell| \leq \epsilon$$

On écrit alors $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \ell$

II. 2 Continuité

Il est alors possible de définir la notion de continuité pour les fonctions de deux variables. Intuitivement, on dira qu'une fonction de deux variables est continue en (x_0, y_0) si ....

C'est-à-dire :

Définition 9. Soit f une fonction réelle de deux variables réelles, définie sur un domaine $\mathcal{D}$.

- Soit $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}$. On dit que f est continue en (x_0, y_0) si et seulement si

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0)$$

- On dit que f est continue sur $\mathcal{D}$ si f est continue en tout point de $\mathcal{D}$

Tout comme pour les fonctions d'une variable, il existe alors des théorèmes permettant de déduire la continuité d'une somme, d'un produit, d'un quotient ou d'une composée d'applications continues.

Proposition 10. Soient f et g deux fonctions réelles de deux variables réelles continues sur $\mathcal{D}$, et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors on a :

- $f + g$ est continue sur $\mathcal{D}$;
- λf est continue sur $\mathcal{D}$;
- fg est continue sur $\mathcal{D}$;
- si g ne s'annule pas sur $\mathcal{D}$, $\dfrac{1}{g}$ est continue sur $\mathcal{D}$;
- si g ne s'annule pas sur $\mathcal{D}$, $\dfrac{f}{g}$ est continue sur $\mathcal{D}$.

Proposition 11. Soient f une fonction réelle de deux variables réelles continue sur $\mathcal{D}$, et à valeurs dans un sous-ensemble A de $\mathbb{R}$. Soit φ une fonction réelle d'une variable continue sur A.
Alors on a : $\varphi \circ f$ continue sur $\mathcal{D}$.

En pratique, on utilisera ces propriétés pour montrer la continuité de fonctions de plusieurs variables, ainsi que la propriété suivante, qui s'intéresse aux fonctions polynomiales :

Proposition 12. Soient n et p deux entiers, et $(a_{i,j})_{(i,j)\in[\![0,n]\!]\times[\![0,p]\!]}$ une famille de réels. La fonction polynomiale à deux variables P définie par :

$$P : \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \displaystyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{p} a_{i,j}x^i y^j \end{array} \right.$$

est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 13. Étudier la continuité des fonctions définies par :

1. $f(x,y) = x^3y^2 - 4xy^2 + 5x - 7$
2. $f(x,y) = \ln(x^2 - y^2)$
3. $f(x,y) = \sqrt{x+y}$
4. $f(x,y) = \dfrac{e^{x+y}}{2xy}$

Étudions le lien entre la continuité de f et la continuité de ses applications partielles.

Proposition 14. Soit f une fonction réelle de deux variables réelles définie sur $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2$. Si f est continue sur $\mathcal{D}$, alors pour tout $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}$:

- ....
- ....

Remarque. ⚠ La réciproque est fausse !

Considérons la fonction définie par $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

- Montrer que $\forall y \neq 0$, $f(.,y)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et que $\forall x \neq 0$, $f(x,.)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

- Montrer que $f(.,0)$ et $f(0,.)$ sont continues sur $\mathbb{R}$.

- Montrer que pourtant, f n'est pas continue en $(0,0)$.

III Dérivabilité

III. 1 Dérivées partielles

Définition 15. Soit f une fonction réelle de deux variables réelles définie sur $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2$.

- On dit que f est dérivable par rapport à la première variable en (x_0, y_0) si ......

  ....

  On note alors $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ la dérivée partielle de f par rapport à la première variable en (x_0, y_0).
- On dit que f est dérivable par rapport à la deuxième variable en (x_0, y_0) si ......

  ....

  On note alors $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ la dérivée partielle de f par rapport à la deuxième variable en (x_0, y_0).

Remarque. Les fonctions $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont appelées dérivées partielles premières de f.
On a de plus :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h},$$

et :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

En pratique, pour calculer les dérivées partielles, on fixe une variable (que l'on considère constante), et on dérive normalement par rapport à l'autre.

Exercice 16. Calculer les dérivées partielles des fonctions de l'exercice 2.

Définition 17. Soit f une fonction réelle de deux variables réelles définie sur $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2$. Si f est dérivable par rapport à ses deux variables en un point (x_0, y_0), on peut définir le gradient de f de la façon suivante :

$$\nabla f(x_0, y_0) =$$

Remarque. Le gradient de f est donc une fonction qui va de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. On a ici donné l'expression de $\nabla f(x_0, y_0)$ en coordonnées cartésiennes.

Exercice 18. Calculer le gradient de la fonction définie par $f(x, y) = \dfrac{x^2}{e^{xy}}$.

III. 2 Fonctions $\mathcal{C}^1$

Définition et propriétés

Il est alors aisé de définir la notion de fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

Définition 19. Soit f une fonction réelle de deux variables réelles définie sur $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2$. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}$ si :

- ....
- ....

Comme pour les fonctions réelles, on montrera très souvent le caractère $\mathcal{C}^1$ d'une fonction en utilisant les deux théorèmes suivants :

Proposition 20. Soient f et g deux fonctions réelles de deux variables réelles $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}$, et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors on a :

- $f+g$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}$;
- λf est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}$;
- fg est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}$;
- si g ne s'annule pas sur $\mathcal{D}$, $\dfrac{1}{g}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}$;
- si g ne s'annule pas sur $\mathcal{D}$, $\dfrac{f}{g}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}$.

Proposition 21. Soient f une fonction réelle de deux variables réelles $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}$, et à valeurs dans un sous-ensemble A de $\mathbb{R}$. Soit φ une fonction réelle d'une variable $\mathcal{C}^1$ sur A.
Alors on a : $\varphi \circ f$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}$.

La propriété suivante permet de calculer la dérivée d'une composée d'une fonction de deux variables où chaque variable dépend d'un paramètre.

Proposition 22. Soit f une fonction réelle de deux variables réelles définie sur $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2$, et soient x et y deux fonctions réelles définie sur un même intervalle I. Si :

- f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}$,
- x et y sont $\mathcal{C}^1$ sur I ,
- $\forall t \in I, (x(t), (y(t)) \in \mathcal{D}$,

Alors la fonction $\varphi : \left(\begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & f(x(t), y(t)) \end{array} \right.$ est $\mathcal{C}^1$ sur I et on a, $\forall t \in I$:

$\varphi'(t) =$

Remarque. En utilisant la définition du gradient, on obtient : $\varphi'(t) =$ ....

Exercice 23. Calculer les dérivées partielles de la fonction définie par $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2}$. En déduire la dérivée de la fonction définie par $\varphi(t) = f(\cos t, \sin t)$. Retrouver ce résultat par un calcul direct.

Développement limité au voisinage d'un point

Théorème 24. Soit f une fonction réelle de deux variables réelles de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2$, et soit $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}$. On peut alors exprimer les petites variations de f autour de (x_0, y_0) grâce aux dérivées partielles de f en (x_0, y_0) de la façon suivante :

$$f(x,y) \underset{(x_0,y_0)}{=} f(x_0,y_0)+(x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)+(y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)+o\left(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\right).$$

On dit que f admet ....

Remarque. En utilisant la définition du gradient, on obtient :

$$f(x,y) \underset{(x_0,y_0)}{=}$$

Ce théorème permet d'estimer l'allure de f au voisinage de (x_0, y_0). En particulier, on constate que si la fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de (x_0, y_0), la surface représentative de f peut être approchée par la surface représentative de la fonction :

$$(x,y) \mapsto f(x_0,y_0) + (x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + (y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0).$$

Cette surface représentative est un plan, on parle de ....
Il permet également de montrer la propriété suivante.

Proposition 25. Soit f une fonction réelle de deux variables réelles définie sur $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2$. On a alors :

$$f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathcal{D} \implies f \text{ est continue sur } \mathcal{D}.$$

Démonstration. $\square$

III. 3 Extrema

On généralise ici la notion d'extrema aux fonctions de deux variables.

Définition 26. Soit f une fonction réelle de deux variables réelles définie sur $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2$.
Soit $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}$.

- On dit que f admet un minimum global en (x_0, y_0) si $\forall (x, y) \in \mathcal{D}$, ...
- On dit que f admet un maximum global en (x_0, y_0) si $\forall (x, y) \in \mathcal{D}$, ...
- On dit que f admet un minimum local en (x_0, y_0) si il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout

  $(x, y) \in \mathcal{D} \cap (]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\times]y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon[)$, on a : . . . .
- On dit que f admet un maximum local en (x_0, y_0) si il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout

  $(x, y) \in \mathcal{D} \cap (]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\times]y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon[)$, on a : . . . .

On dit qu'un fonction admet un extremum global (resp. local) lorsqu'elle admet un minimum ou un maximum global (resp. local).

Exemple. Montrons que la fonction définie par $f(x, y) = x^2 + y^2$ admet un minimum global sur $\mathbb{R}^2$:

Proposition 27. Soit f une fonction réelle de deux variables réelles définie sur $\mathcal{D} = I \times J$ et $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}$. Si :

- . . . .
- . . . .

Alors on a : $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) & = \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) & = \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \nabla f(x_0, y_0) = \qquad .$

Démonstration. □

Remarques.

- ⚠ Le théorème est faux si on ne considère pas des intervalles ouverts.
  Contre-exemple : la fonction définie par $f(x, y) = x^2 + y^2$ admet un maximum global sur $[0, 1] \times [0, 1]$ en $(1, 1)$. Mais on a pourtant : $\nabla f(1, 1) = (2, 2) \neq (0, 0)$.
- ⚠ La réciproque est fausse ! Les dérivées partielles peuvent s'annuler sans que le point considéré soit un extremum.

Définition 28. Soit f une fonction réelle de deux variables réelles définie sur $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2$. On dit que $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}$ est un point critique de f si on a ....

Remarque. Comme dit précédemment, un point critique n'est pas nécessairement un extremum.

Exercice 29. Montrer que $f(x,y) = x^2 + y^3$ admet un point critique en $(0,0)$, mais que ce n'est pas un extremum.

Méthode pour trouver des extrema

- Chercher les points critiques de f, c'est-à-dire ceux qui annulent ∇f.
- Regarder si ces points sont des extrema.

Exercice 30. On considère la fonction $f : \begin{pmatrix}]0,+\infty[\times]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x^{\ln x} + y^{\ln y} \end{pmatrix}$. Étudier les extrema de f.

III. 4 Dérivées partielles d'ordre 2

Définition 31. Soit f une fonction réelle de deux variables réelles définie sur $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2$. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{D}$ si :

- ....
- ....
- ....

Remarque. On notera : $\dfrac{\partial \frac{\partial f}{\partial x}}{\partial x} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial \frac{\partial f}{\partial x}}{\partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, $\dfrac{\partial \frac{\partial f}{\partial y}}{\partial x} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et : $\dfrac{\partial \frac{\partial f}{\partial y}}{\partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

Ces dérivées sont appelées dérivées partielles d'ordre 2 de f.

Exercice 32. Montrer que la fonction définie par $f(x,y) = e^{x^2 - 3xy}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et calculer ses dérivées partielles d'ordre 2.

Théorème 33. Théorème de Schwarz.
Soit f une fonction réelle de deux variables réelles définie sur $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2$. Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{D}$, alors on a :

Remarque. ⚠ Le théorème est faux si f n'est pas de classe $\mathcal{C}^2$!

Exercice 34. Soit f définie par $f(x,y) = \dfrac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$. Montrer que l'on a $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.