Table des matières

Chapitre 4 - Suites réelles usuelles

Définition 1. Définition d'une suite :
- Une suite réelle u est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$).
- Pour désigner les valeurs prises par la suite, on note u_n à la place de $u(n)$.
- Pour désigner la suite globale, on écrit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$: c'est la suite de terme général u_n.

Remarque. Certaines suites ne sont définies qu'à partir d'un certain rang.
Exemple : ....
Plus généralement, on note .... la suite de terme général u_n définie à partir du rang n_0.

⚠ Ne pas confondre ....

Représentation graphique d'une suite On peut représenter graphiquement une suite réelle en portant en abscisse les entiers naturels et en ordonnées les valeurs correspondantes de la suite. On obtient ainsi une succession de points qui décrivent l'évolution de la suite.

Exemple 1. Représenter graphiquement la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ de terme général $u_n = \dfrac{1}{n}$.

I Suite arithmétique

Définition 2. Définition d'une suite arithmétique :
Une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est dite arithmétique de raison r si pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = u_n + r$$

Proposition 3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0.

- Expression explicite : $u_n = u_0 + nr$
- Limite : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right.$
- Somme des termes : $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k =$

Remarque. Une suite $(u_n)_{n\geq p}$ est arithmétique de raison r et de premier terme u_p si ....
On a alors $u_n =$ .... et $\sum\limits_{k=p}^{n} u_k =$ ....

II Suite géométrique

Définition 4. Définition d'une suite géométrique : Une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est dite géométrique de raison q

$$u_{n+1} = qu_n$$

Proposition 5. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0.

- Expression explicite : $u_n =$
- Limite (pour $u_0 > 0$) : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right.$
- Somme des termes : $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k = \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right.$

Remarque. Une suite $(u_n)_{n\geq p}$ est géométrique de raison q et de premier terme u_p si ....
On a alors $u_n =$ .... et $\sum\limits_{k=p}^{n} u_k =$ ....

III Suite arithmético-géométrique

Définition 6. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit qu'elle est arithmético-géométrique s'il existe deux réels a et b ($a \neq 1$ et $b \neq 0$ sinon on est dans les deux cas précédents) tels que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + b.$$

- Recherche de la limite éventuelle en résolvant $al + b = l$.
- Étude de la suite auxiliaire $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_n - l$.
  - ⋆ Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison a.
  - ⋆ En déduire son expression explicite.
- Expression explicite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en utilisant : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = v_n + l$.

Exemple 2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = 3u_n + 4$. Calculer u_n.

1. **Recherche de la limite éventuelle :**
2. **Étude de la suite auxiliaire $(\mathbf{v_n})_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}}$**
3. **Expression explicite de la suite $(\mathbf{u_n})_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}}$**
4. **Limite de la suite $(\mathbf{u_n})_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}}$**

Exercice 7. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $u_0 = 4$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n + 1$. Donner son expression explicite, sa limite et la somme $\sum_{k=0}^{n} u_k$.

Remarque. ⚠ Les réels a et b ne doivent pas dépendre de n !

Exercice 8. Trouver le terme général des suites définies par $u_{n+1} = nu_n, u_{n+1} = \frac{2}{n}u_n$, et $u_{n+1} = u_n^2$.

IV Suite récurrente linéaire d'ordre deux

Définition 9. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $b \neq 0$. On appelle suite récurrente linéaire d'ordre deux toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence :

$$(\mathcal{R}) \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} =$$

avec deux conditions initiales données (u_0 et u_1).

- Résolution de l'équation caractéristique associée à la suite :

$$(E) \quad x^2 - ax - b = 0.$$

- Expression explicite de la suite selon le signe du discriminant de l'équation caractéristique :
  - ⋆ Si $\Delta > 0$: (E) a deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2, et l'expression explicite de la suite est :

$$\exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n =$$

- ⋆ Si $\Delta = 0$, (E) a une solution réelle double r_0, et l'expression explicite de la suite est :

  $$\exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n =$$

- ⋆ Si $\Delta < 0$: (E) a deux solutions complexes conjuguées que l'on écrit sous forme exponentielle $\rho e^{i\theta}$ et $\rho e^{-i\theta}$ (avec $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$). L'expression explicite de la suite est alors :

  $$\exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n =$$

- Calcul des constantes α et β à l'aide des valeurs des conditions initiales u_0 et u_1 en résolvant un système linéaire.

Exemple 3. Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1$ et $u_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = -2u_{n+1} + 3u_n$.

Exercice 10. Étudier les suites définies par :

- $u_0 = 1$ et $u_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$.
- $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = -u_{n+1} - u_n$.

‘

V Limites

V. 1 Endcadrement

Théorème des gendarmes pour montrer une convergence et obtenir la valeur de la limite :

Théorème 11. Théorème des gendarmes :
Soient trois suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifient les hypothèses suivantes :

- à partir d'un certain rang : $u_n \leq v_n \leq w_n$
- $u_n \to \ell$ et $w_n \to \ell$

Alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $\lim_{n\to\infty} v_n = \ell$.

Exemple 4. Étudier le comportement de la suite $\left(\dfrac{\sin n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^\star}$:

Correction On a l'encadrement suivant :

$$\forall x \in \mathbb{R}\, |\sin(x)| \leq 1$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{-1}{n} \leq \frac{\sin(n)}{n} \leq \frac{1}{n}$$

Comme $\frac{1}{n} \to 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n)}{n} = 0$$

Exercice 12.

1. Soit la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$: $u_n = \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n}$. Étudier la convergence de cette suite.
2. Soit la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$: $u_n = \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge vers 0.

V. 2 Suites adjacentes

Définition 13. Définition de deux suites adjacentes :
Soient deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On dit qu'elles sont adjacentes si

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante (ou inversement)
- $(u_n - v_n) \to 0$

Théorème 14. Soient deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ adjacentes.
Alors les suites convergent et ont même limite.

Exercice 15. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{nn!}$. Montrer que ces deux suites convergent vers la même limite.

Correction $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une somme de termes positifs, elle est donc croissante.
Pour l'étude de la monotonie de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, calculons $v_{n+1} - v_n$:

$$\begin{aligned}
v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} - u_n + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{(n)(n)!} \\
&= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{n}{n(n+1)(n+1)!} - \frac{(n+1)(n+1)}{n(n+1)(n+1)!} \\
&= \frac{n(n+1) + n - (n+1)^2}{n(n+1)(n+1)!} \\
&= \frac{-1}{n(n+1)(n+1)!} & < 0
\end{aligned}$$

Donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
Enfin

$$v_n - u_n = \frac{1}{nn!} \to 0$$

Donc les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. D'après le théorème, elles convergent et ont même limite.