Correction TD 1 - Nombres réels

I Ensembles

Correction 1.

Décrire sous forme d'intervalles (ou d'union d'intervalles) les ensembles suivants :

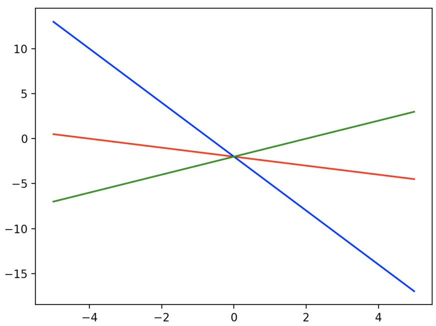
1. $E_1 =]-1, 1[$
2. $E_2 = [0, 5[$
3. $E_3 = [-1, 1]$
4. $E_4 = [0, 2]$
5. $E_5 = [-1, 1]$
6. $E_6 = [-1, 1]$

Correction 2.

1. E_1 non minoré, non majoré.
2. E_2 borné.
3. E_3 minoré, non majoré.
4. E_4 minoré, non majoré.
5. E_5 minoré, non majoré.
6. E_6 non minoré, non majoré.

Correction 3.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
x = np.arange(-5,5, 0.01)
y1=x-2
y2=-3*x-2
y3=-0.5*x -2
plt.plot(x,y1,'g')
plt.plot(x,y2,'b')
plt.plot(x,y3,'r')
plt.show()
```



Soit $(x, y) \in A$, on a alors, $y = x - 2$ donc $3x + y + 2 = 4x$ et $x + 2y + 4 = 3x$. Ainsi $(3x + y + 2)(x + 2y + 4) = 7x^2 \geq 0$, et donc $(x, y) \in B$, on a bien

$$\boxed{A \subset B}$$

En revanche, $(2, 4) \in B$ mais $(2, 4) \notin A$ donc on $A \neq B$ (j'ai pris $(2, 4)$, mais il y a plein d'autres exemples. C'est le premier qui m'est passé par la tête et qui fonctionnait)

II Calculs

Correction 4.

1. $\frac{4^{10}}{8^4} = \frac{2^{20}}{2^{12}} = 2^8 = 256$ https://jeu2048.fr
2. $10^3 10^{-4} 100^3 = 10^{3-4+6} = 10^5 = 10000$
3. $\frac{(10^4)^2}{10^5} = \frac{(10^8)}{10^5} = 10^3$
4. $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{13}{12}$
5. $\frac{1}{12} + \frac{1}{18} + \frac{1}{24} = \frac{13}{72}$
6. $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$

Correction 5.

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{1+\frac{1}{x}}} = \frac{1}{1 - \frac{x}{x+1}} = \frac{1}{\frac{x+1-x}{x+1}} = x + 1$$

et

$$\frac{1}{-1-\frac{1}{\frac{x}{1-x}}}=\frac{1}{-1-\frac{1-x}{x}}=\frac{1}{\frac{-1}{x}}=-x$$

d'où

$$\boxed{\frac{1}{1-\frac{1}{1+\frac{1}{x}}}+\frac{1}{-1-\frac{1}{\frac{x}{1-x}}}=1}$$

III Résolution d'équations et d'inéquations :

Correction 6. Résolution d'équations et d'inéquations avec des polynômes.

1. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $\mathbf{x^3+4x^2+x-6\geq 0}$:**
   1 est racine évidente et on obtient : $x^3+4x^2+x-6\geq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+5x+6)\geq 0$. Un tableau de signe donne $\boxed{\mathcal{S}=[-3,-2]\cup[1,+\infty[.}$
2. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $\mathbf{x^3-x^2-x-2<0}$:**
   2 est racine évidente et on obtient :$x^3-x^2-x-2<0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2+x+1)<0$ et le discriminant de x^2+x+1 est négatif donc $\boxed{\mathcal{S}=]-\infty,2[.}$
3. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $\mathbf{(3x-1)(x+2)+(2-6x)(4x+3)>0}$:**
   On factorise par $3x-1$ et on obtient :
   $$(3x-1)(x+2)+(2-6x)(4x+3)>0 \Leftrightarrow (3x-1)\left[x+2-2(4x+3)\right]>0 \Leftrightarrow (3x-1)(-7x-4)>0.$$
   Un tableau de signe donne $\boxed{\mathcal{S}=\left]-\frac{4}{7},\frac{1}{3}\right[.}$
4. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $\mathbf{32x^6-162x^2<0}$:**
   On factorise par $2x^2$ puis on utilise l'identité remarquable a^2-b^2 et on obtient :
   $$32x^6-162x^2<0 \Leftrightarrow 2x^2(16x^4-81)<0 \Leftrightarrow 2x^2(4x^2-9)(4x^2+9)<0.$$
   Un tableau de signe donne $\boxed{\mathcal{S}=\left]-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right[\setminus\{0\}.}$
5. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $\mathbf{\dfrac{2x}{4x^2-1}\leq\dfrac{2x+1}{4x^2-4x+1}}$:**
   On commence par le domaine de résolution. L'inéquation est bien définie si et seulement si $4x^2-1\neq 0$ et $4x^2-4x+1\neq 0$. Ainsi $\mathcal{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\}$.
   On passe tout du même côté et on met tout au même dénominateur. On a :
   $$\frac{2x}{(2x+1)(2x-1)}-\frac{2x+1}{(2x-1)^2}\leq 0 \Leftrightarrow \frac{2x(2x-1)-(2x+1)(2x+1)}{(2x-1)^2(2x+1)}\leq 0 \Leftrightarrow \frac{-6x-1}{(2x-1)^2(2x+1)}\leq 0.$$
   Un tableau de signe donne $\boxed{\mathcal{S}=\left]-\infty,-\frac{1}{2}\right[\cup\left[-\frac{1}{6},\frac{1}{2}\right[\cup\left]\frac{1}{2},+\infty\right[.}$
6. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $\mathbf{\dfrac{x^4+x}{x^4-5x^2+4}<1}$:**
   On commence par le domaine de résolution. L'inéquation est bien définie si et seulement si $x^4-5x^2+4\neq 0 \Leftrightarrow (x^2-4)(x^2-1)\neq 0$. Ainsi $\mathcal{D}=\mathbb{R}\setminus\{-2,-1,1,2\}$.
   On passe tout du même côté et on met tout au même dénominateur. On a :
   $$\frac{x^4+x}{x^4-5x^2+4}-1<0 \Leftrightarrow \frac{5x^2+x-4}{(x^2-4)(x^2-1)}<0.$$

Un tableau de signe donne $\boxed{\mathcal{S} =]-2,-1[\,\cup \left]-1,\frac{4}{5}\right[\cup]1,2[.}$

7. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $\mathbf{2x^2 - 4x + 2 = 1 - x}$:**
$2x^2 - 4x + 2 = 1 - x \Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 1 = 0$ donc $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\frac{1}{2}, 1\right\}}$.

8. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $\mathbf{(x-1)^2 \leq 1}$:**
$(x-1)^2 \leq 1 \Leftrightarrow x(x-2) \leq 0$ donc $\boxed{\mathcal{S} = [0,2]}$.

9. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $\mathbf{\frac{1}{x-2} \leq \frac{1}{2x}}$:**
On commence par le domaine de résolution. L'inéquation est bien définie si et seulement si $x - 2 \neq 0$ et $2x \neq 0$. Ainsi $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0,2\}$.
De plus, on a : $\frac{1}{x-2} \leq \frac{1}{2x} \Leftrightarrow \frac{x+2}{2x(x-2)} \leq 0$ et un tableau de signe donne $\boxed{\mathcal{S} =]-\infty,-2] \cup]0,2[}$.

10. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $\mathbf{\frac{2x+1}{1+x} \geq \frac{3x-2}{1+x}}$:**
On commence par le domaine de résolution. L'inéquation est bien définie si et seulement si $x + 1 \neq 0$. Ainsi $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
$\frac{2x+1}{x+1} \geq \frac{3x-2}{1+x} \Leftrightarrow \frac{-x+3}{1+x} \geq 0$ et un tableau de signe donne $\boxed{\mathcal{S} =]-1,3]}$.

11. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $\mathbf{\frac{x^2+10x-4}{x-2} \leq \frac{16x+2}{x+1}}$:**
On commence par le domaine de résolution. L'inéquation est bien définie si et seulement si $x - 2 \neq 0$ et $x + 1 \neq 0$. Ainsi $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1,2\}$.
$\frac{x^2+10x-4}{x-2} \leq \frac{16x+2}{x+1} \Leftrightarrow \frac{x(x^2-5x+36)}{(x-2)(x+1)} \leq 0$ donc un tableau de signe donne $\boxed{\mathcal{S} =]-\infty,-1[\cup[0,2[}$.

Correction 7. L'ensemble de définition est $D_a = \mathbb{R} \setminus \{a\}$. On a pour tout $x \in D_a$:

$$\begin{aligned}
(I(a)) &\iff \frac{1}{x-a} - x \geq 0 \\
&\iff \frac{1 - x(x-a)}{x-a} \geq 0 \\
&\iff \frac{-x^2 + ax + 1}{x-a} \geq 0 \\
&\iff \frac{x^2 - ax - 1}{x-a} \leq 0
\end{aligned}$$

Le discriminant de $x^2 - ax - 1$ est $\Delta(a) = a^2 + 4 > 0$ pour tout $a \in \mathbb{R}$. Les racines sont

$$r_+(a) = \frac{a + \sqrt{a^2+4}}{2} \quad \text{et} \quad r_-(a) = \frac{a - \sqrt{a^2+4}}{2}$$

On va résoudre

$$r_+(a) \geq a \tag{I_+}$$

et

$$r_-(a) \geq a \tag{I_-}$$

Résolvons (I_+)

$$r_+(a) \geq a \iff \sqrt{a^2+4} \geq a \tag{1}$$

Si $a \geq 0$, $r_+(a) \geq a \iff a^2 + 4 \geq a^2$ toujours vrai. Donc $a \geq 0$ solution.
Si $a \leq 0$, a est solution car $\sqrt{a^2+4} \geq 0 \geq a$ Les solutions de (I_+) sont $S_+ = \mathbb{R}$
Les solutions de (I_-) sont $S_- = \emptyset$.
Les solutions de $I(a)$ sont donc données par (tableau de signes)

$$\boxed{]-\infty, r_-(a)]\cup]a, r_+(a)])}$$

Correction 8.

1. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $\mathbf{m(x+2) = 2m(3x-4)}$:**

   - Domaine de résolution : $\mathbb{R}$.
   - On résout par équivalences successives, l'inconnue étant ici x. On obtient ainsi que :
   $$m(x+2) = 2m(3x-4) \Leftrightarrow -5mx = -10m \Leftrightarrow mx = 2m.$$
   On doit donc ici étudier deux cas selon que m est nul ou pas car on ne peut pas diviser une égalité par un nombre nul...
     - ⋆ Cas 1 : si $m = 0$: l'équation est alors équivalente à : $0 = 0$ et ainsi $\boxed{\mathcal{S}_{m=0} = \mathbb{R}}$.
     - ⋆ Cas 2 : si $m \neq 0$: l'équation est alors équivalente à : $x = 2$ et ainsi $\boxed{\mathcal{S}_{m\neq 0} = \{2\}}$.

2. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $\mathbf{(m+1)x + 2 - m = 0}$:**
   Le domaine de résolution est $\mathbb{R}$ et on a :
   $$(m+1)x + 2 - m = 0 \Leftrightarrow (m+1)x = m-2.$$
   - Si $m = -1$, l'équation devient $0 = -1-2 = -3$. On obtient donc : $\boxed{\mathcal{S}_{m=-1} = \emptyset}$.
   - Si $m \neq -1$, on peut alors diviser par $m+1 \neq 0$ et on obtient : $\boxed{\mathcal{S}_{m\neq -1} = \left\{\dfrac{m-2}{m+1}\right\}}$.

3. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $\mathbf{e^{2x} - 2me^{x} + 1 = 0}$:**
   Le domaine de résolution est $\mathbb{R}$ et on a
   $$e^{2x} - 2me^x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = e^x \\ \text{et} \\ X^2 - 2mX + 1 = 0. \end{cases}$$
   Étude de l'équation $X^2 - 2mX + 1 = 0$. Son discriminant vaut $\Delta = 4(m^2-1)$. On fait des cas selon le signe de Δ :
   - Si $m \in \,]-1, 1[$, alors $\Delta < 0$, et $\boxed{\mathcal{S}_{m\in]-1,1[} = \emptyset}$.
   - Si $m \in \,]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$, alors $\Delta \geq 0$. Il existe donc deux solutions réelles (distinctes si $m \neq -1$ et $m \neq 1$ et égale sinon) qui sont
   $$X_1 = m + \sqrt{m^2-1} \text{ et } X_2 = m - \sqrt{m^2-1}.$$
   Comme $X = e^x$, on doit vérifier si X_1 et X_2 sont bien strictement positives.
     - ⋆ Étude de X_1 :
     $$X_1 > 0 \Leftrightarrow \sqrt{m^2-1} > -m.$$
       - ◦ Si $m \in \,]-\infty, -1]$, alors $-m \geq 0$ et on peut passer au carré de chaque côté tout en conservant l'équivalence. Ainsi,
       $$\sqrt{m^2-1} > -m \Leftrightarrow m^2 - 1 > m^2 \Leftrightarrow -1 > 0.$$
       Impossible donc X_1 ne peut pas être solution si $m \in \,]-\infty, -1]$.
       - ◦ Si $m \in [1, +\infty[$, alors $-m < 0$ et l'inéquation est toujours vérifiée. Ainsi, X_1 est solution si $m \in [1, +\infty[$.

- $\star$ Étude de X_2. On refait un raisonnement analogue et on obtient que si $m \in]-\infty, -1]$, X_2 ne peut pas être solution et que si $m \in [1, +\infty[$, X_2 est solution.

On peut donc conclure dans le cas où $m \in]-\infty, -1]$, on a : $\boxed{\mathcal{S}_{m\in]-\infty,-1]} = \emptyset}$.

Il nous reste ainsi à finir le cas où $m \in [1, +\infty[$. Dans ce cas, on a vu que X_1 et X_2 sont strictement positifs. On obtient alors en utilisant le fait que la fonction $\ln$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+\star}$:

$$e^{2x} - 2me^x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} e^x = m + \sqrt{m^2-1} \\ \text{ou} \\ e^x = m - \sqrt{m^2+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln(m + \sqrt{m^2-1}) \\ \text{ou} \\ x = \ln(m - \sqrt{m^2+1}). \end{cases}$$

Ainsi, on obtient : $\boxed{\mathcal{S}_{m\in[1,+\infty[} = \{\ln(m+\sqrt{m^2-1}), \ln(m-\sqrt{m^2-1})\}}$.

4. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $\mathbf{\dfrac{m+3}{x} = \dfrac{2m-1}{x-1}}$:**

- Domaine de définition : $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.
- On passe tout du même côté et on met tout sur le même dénominateur. On obtient :

$$\frac{m+3}{x} = \frac{2m-1}{x-1} \Leftrightarrow \frac{(4-m)x - (m+3)}{x(x-1)} = 0 \Leftrightarrow (4-m)x - (m+3) = 0.$$

On doit donc étudier des cas :

- $\star$ Cas 1 : si $m = 4$, on obtient : $m + 3 = 0 \Leftrightarrow 7 = 0$. Ainsi $\boxed{\mathcal{S}_{m=4} = \emptyset.}$
- $\star$ Cas 2 : si $m \neq 4$, on obtient $x = \dfrac{m+3}{4-m}$. Il reste alors à vérifier que ce nombre est bien dans le domaine de résolution, à savoir que $\dfrac{m+3}{4-m} \neq 0$ et $\dfrac{m+3}{4-m} \neq 1$.
  - $\star$ Si $m = -3$ alors $\dfrac{m+3}{4-m} = 0$ et ainsi $\boxed{\mathcal{S}_{m=-3} = \emptyset.}$
  - $\star$ Si $m = \dfrac{1}{2}$ alors $\dfrac{m+3}{4-m} = 1$ et ainsi $\boxed{\mathcal{S}_{m=\frac{1}{2}} = \emptyset.}$
  - $\star$ Sinon $\boxed{\mathcal{S}_{m\in\mathbb{R}\setminus\{4,-3,\frac{1}{2}\}} = \left\{\dfrac{m+3}{4-m}\right\}.}$

5. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $\mathbf{x - m = \sqrt{x^2 + mx}}$:**

- Domaine de résolution : L'équation est bien définie si $x^2 + mx \geq 0 \Leftrightarrow x(x+m) \geq 0$. Les racines du polynôme de gauche sont 0 et $-m$. On doit donc distinguer trois cas selon que $m > 0$, $m = 0$ et $m < 0$.
  - $\star$ Cas 1 : si $m > 0$:
    Un tableau de signe donne que : $\mathcal{D} =]-\infty, -m] \cup [0, +\infty[$.
  - $\star$ Cas 2 : si $m = 0$:
    On doit résoudre $x^2 \geq 0$ et ainsi : $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
  - $\star$ Cas 3 : si $m < 0$:
    Un tableau de signe donne que : $\mathcal{D} =]-\infty, 0] \cup [-m, +\infty[$.
- Résolution :
  Lorsque $x - m < 0 \Leftrightarrow x < m$: il n'y a pas de solution car une racine carrée est positive ou nulle. Ainsi on se place dans le cas où $x \geq m$. Dans ce cas là, les deux membres de l'équation

sont positifs et on peut donc passer au carré tout en conservant l'équivalence. On obtient ainsi :

$$x-m=\sqrt{x^2+mx} \Leftrightarrow x^2-2mx+m^2=x^2+mx \Leftrightarrow 3mx=m^2.$$

On doit alors distinguer deux cas selon que $m=0$ ou pas :

- ⋆ Cas 2 : $m=0$: dans ce cas, on obtient : $x-m=\sqrt{x^2+mx} \Leftrightarrow x=|x|$ ce qui est vrai si et seulement si $x \geq 0$. Ainsi $\boxed{\mathcal{S}_{m=0}=\mathbb{R}^+}$ car le domaine de résolution est $\mathbb{R}$.
- ⋆ Cas 1 et Cas 3 : $m \neq 0$: dans ce cas, on peut diviser par m et on obtient :

$$x-m=\sqrt{x^2+mx} \Leftrightarrow x=\frac{m}{3}.$$

  Il ne reste plus qu'à regarder si un tel x est dans le domaine de définition, et s'il vérifie bien la condition $x \geq m$.

  - ∘ Cas 1 : si $m>0$: on a $\frac{m}{3} \in [0,+\infty[\subset \mathcal{D}$. Par contre, cette fois on a $\frac{m}{3}<m$, donc la solution ne convient pas. Ainsi on obtient que $\boxed{\mathcal{S}_{m>0}=\emptyset.}$
  - ∘ Cas 3 : si $m<0$: on a bien $\frac{m}{3} \in]-\infty,0] \subset \mathcal{D}$, et d'autre part, on a aussi $\frac{m}{3} \geq m$. On obtient donc que $\boxed{\mathcal{S}_{m<0}=\left\{\frac{m}{3}\right\}.}$

Correction 9. **Valeurs de m pour que $\mathbf{mx^2+(m-2)x+2m-2=0}$ ait deux racines réelles distinctes :**

Il faut que m soit non nul (pour avoir une équation d'ordre 2), et que $\Delta>0$, à savoir : $-7m^2+4m+4>0$.

On étudie le discrimant de ce trinôme en m : on a $\delta=2\times 64$. Les racines du trinôme en m sont donc :

$$m_1=\frac{2-4\sqrt{2}}{7} \quad \text{et} \quad m_2=\frac{2+4\sqrt{2}}{7}.$$

Ainsi, l'équation a deux racines réelles distinctes pour : $\boxed{m \in \left]\frac{2-4\sqrt{2}}{7},\frac{2+4\sqrt{2}}{7}\right[\setminus\{0\}}$.

Correction 10.

1. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $\mathbf{\sqrt{x+1}=x-1}$:**

   - ⋆ Domaine de définition : $\mathcal{D}=[-1,+\infty[$
   - ⋆ Attention, pour pouvoir élever au carré, il faut que les termes des deux côtés soient du même signe ! Il faut toujours faire des cas :
     - Cas 1 : si $x<1$: on ne peut pas élever au carré.
       Une racine carrée étant toujours positive, on a $\mathcal{S}_1=\emptyset$.
     - Cas 2 : si $x \geq 1$: on peut passer au carrée dans l'égalité tout en conservant l'équivalence, les deux membres étant positifs. On obtient comme résultat $x=0$ ou $x=3$. Or, on est sous l'hypothèse $x \geq 1$ donc $\mathcal{S}_2=\{3\}$.

     Synthèse : on a $\mathcal{S}=\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$, soit : $\boxed{\mathcal{S}=\{3\}}$.

2. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $\mathbf{\sqrt{x+4}+\sqrt{x+2}\leq 1}$:**

   - ⋆ Domaine de définition : $\mathcal{D}=[-2,+\infty[$.

⋆ Les deux termes étant positifs, on peut passer au carré dans l'inégalité tout en conservant l'équivalence et on obtient

$$\sqrt{x+4}+\sqrt{x+2}\leq 1 \Leftrightarrow \sqrt{(x+4)(x+2)}\leq -\frac{5}{2}-x.$$

Il faut ensuite faire deux cas :

- Cas 1 : si $x>-\frac{5}{2}$: on ne peut pas élever au carré.
  Comme une racine est toujours supérieure ou égale à 0, on obtient $\mathcal{S}_1=\emptyset$.
- Cas 2 : si $x\leq -\frac{5}{2}$: impossible car $\mathcal{D}=[-2,+\infty[$ donc $\mathcal{S}_2=\emptyset$.

Synthèse : on a $\boxed{\mathcal{S}=\emptyset}$.

3. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $\sqrt{\mathbf{x^2-3}}>\mathbf{5x-9}$:**

⋆ Domaine de définition : $\mathcal{D}=\,]-\infty,-\sqrt{3}]\cup[\sqrt{3},+\infty[$.

⋆ On fait deux cas pour élever au carré :

- Cas 1 : Si $x\leq\frac{9}{5}$: on ne peut pas élever au carré.
  Une racine carrée étant toujours positive ou nulle, on obtient $\mathcal{S}_1=]-\infty,-\sqrt{3}]\cup\left[\sqrt{3},\frac{9}{5}\right]$.
- Cas 2 : Si $x>\frac{9}{5}$.
  Les deux termes de l'inéquation sont alors positifs et on peut donc passer au carré tout en conservant l'équivalence. On obtient

$$\sqrt{x^2-3}>5x-9\Leftrightarrow 4x^2-15x+14<0.$$

  Les racines sont alors $\frac{7}{4}$ et 2. L'ensemble solution est alors pour ce cas, en n'oubliant pas de regarder à la fois le domaine de définition et l'hypothèse $x>\frac{9}{5}$, $\mathcal{S}_2=\left]\frac{9}{5},2\right[$.

Synthèse : on a $\boxed{\mathcal{S}=]-\infty,-\sqrt{3}]\cup[\sqrt{3},2[}$.

4. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $\mathbf{e^x-1}\geq\sqrt{\mathbf{e^{x+1}-e^x-e+1}}$:**

⋆ Domaine de définition : l'inéquation est bien définie si et seulement si

$$e^{x+1}-e^x-e+1\geq 0\Leftrightarrow (e-1)e^x-e+1\geq 0\Leftrightarrow e^x\geq\frac{e-1}{e-1}$$

car $e-1>0$. Ainsi on obtient que : $e^{x+1}-e^x-e+1\geq 0\Leftrightarrow e^x\geq 1\Leftrightarrow x\geq 0$ en composant par la fonction $\ln$ qui est bien strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+\star}$. Ainsi $\mathcal{D}=\mathbb{R}^+$.

⋆ On peut remarquer que sur $\mathcal{D}$, on a toujours $e^x-1\geq 0$. Ainsi les deux termes de l'inéquation sont toujours positifs et on peut passer au carré tout en conservant l'équivalence. On obtient que :

$$e^x-1\geq\sqrt{e^{x+1}-e^x-e+1}\Leftrightarrow e^{2x}-(1+e)e^x+e\geq 0.$$

On pose alors $X=e^x$ et on doit résoudre $X^2-(1+e)X+e\geq 0$. Le discriminant vaut $\Delta=(e-1)^2$ et les racines sont 1 et e. Ainsi on obtient :

$$e^x-1\geq\sqrt{e^{x+1}-e^x-e+1}\Leftrightarrow e^x\leq 1 \text{ ou } e^x\geq e\Leftrightarrow x\leq 0 \text{ ou } x\geq 1$$

en composant par la fonction $\ln$ qui est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+\star}$. Comme $\mathcal{D}=\mathbb{R}^+$, on obtient que :

$$e^x-1\geq\sqrt{e^{x+1}-e^x-e+1}\Leftrightarrow x=0 \text{ ou } x\geq 1.$$

- ⋆ Conclusion : $\boxed{\mathcal{S} = [1, +\infty[\cup \{0\}}$.

5. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $\sqrt{(\mathbf{x}+\mathbf{3})(\mathbf{x}-\mathbf{1})} \geq \mathbf{2x}-\mathbf{1}$:**

   - ⋆ Domaine de définition : l'inéquation est bien définie si et seulement si $(x+3)(x-1) \geq 0$. Il s'agit d'un polynôme de degré 2 dont les racines sont -3 et 1. Ainsi $\mathcal{D} =]-\infty, -3] \cup [1, +\infty[$.
   - ⋆ On étudie deux cas :
     - Cas 1 : si $2x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < \dfrac{1}{2}$: on ne peut pas élever au carré.
       On se place donc sur $]-\infty, -3]$. Comme une racine carrée est un nombre positif ou nul, elle est bien toujours supérieure ou égale à un nombre strictement négatif. Ainsi l'inégalité est toujours vérifiée sur cet ensemble et on obtient que $\mathcal{S}_1 =]-\infty, -3]$.
     - Cas 2 : si $2x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \dfrac{1}{2}$.
       On se place donc sur $[1, +\infty[$. Les deux termes sont alors positifs et on peut donc passer au carré tout en conservant l'équivalence. On obtient que :
       $$\sqrt{(x+3)(x-1)} \geq 2x-1 \Leftrightarrow x^2+2x-3 \geq 4x^2-4x+1 \Leftrightarrow 3x^2-6x+4 \leq 0.$$
       Le discriminant vaut $\Delta = -12$ et ainsi pour tout x, on a : $3x^2 - 6x + 4 > 0$. Donc $\mathcal{S}_2 = \emptyset$.

   Synthèse : on a $\boxed{\mathcal{S} =]-\infty, -3]}$.

6. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $\sqrt{\mathbf{x}+\mathbf{4}} - \sqrt{\mathbf{x}+\mathbf{2}} = \mathbf{1}$:**

   - ⋆ Domaine de définition $\mathcal{D} = [-2, +\infty[$
   - ⋆ On utilise ici la forme conjuguée, c'est-à-dire on multiplie le numérateur et le dénominateur par la quantité strictement positive $\sqrt{x+4}+\sqrt{x+2}$. On obtient alors l'équation équivalente à résoudre
     $$\frac{2}{\sqrt{x+4}+\sqrt{x+2}} = 1 \Leftrightarrow 2 = \sqrt{x+4}+\sqrt{x+2}.$$
     On est ainsi ramené à pratiquement la même équation que tout à l'heure que je vous laisse résoudre. On obtient $\boxed{\mathcal{S} = \left\{-\dfrac{7}{4}\right\}.}$

7. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $\mathbf{x}+\mathbf{1} > \sqrt{\mathbf{x^2}+\mathbf{2x}}$:**

   - ⋆ Domaine de définition : $\mathcal{D} =]-\infty, -2] \cup [0, +\infty[$
   - ⋆ Cas 1 : Si $x \leq -1$:
     Une racine carrée étant toujours positive ou nulle, on obtient $\mathcal{S}_1 = \emptyset$.
   - ⋆ Si $x > -1$:
     Les deux termes de l'inégalité sont alors positifs et on peut donc passer au carré tout en conservant l'équivalence. On obtient l'inégalité équivalente suivante $1 > 0$ qui est toujours vérifiée. Ainsi, l'ensemble des réels qui sont dans le domaine de définition et qui vérifie 'hypothèse $x > -1$ sont solutions et donc $\mathcal{S}_2 = \mathbb{R}^+$.
   - ⋆ Conclusion : $\boxed{\mathcal{S} = \mathbb{R}^+.}$

8. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $\mathbf{1} \leq \left(\dfrac{\mathbf{x}-\mathbf{3}}{\mathbf{x}-\mathbf{1}}\right)^{\mathbf{2}} \leq \mathbf{9}$:**

   - ⋆ Domaine de définition $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

⋆ La racine carrée est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et tous les termes de l'inéquation sont bien positifs, on peut donc composer par la racine carrée. On obtient (ATTENTION $\sqrt{a^2} = |a|$),
$$1 \leq \left|\frac{x-3}{x-1}\right| \leq 3.$$
On fait alors deux cas pour enlever les valeurs absolues :

- Cas 1 : $\frac{x-3}{x-1} \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 1[\cup[3, +\infty[$.
  On doit alors résoudre l'inéquation $1 \leq \frac{x-3}{x-1} \leq 3$. Les réels x doivent donc vérifier $1 \leq \frac{x-3}{x-1}$ et $\frac{x-3}{x-1} \leq 3$. La résolution de la première inéquation donne
  $$\frac{x-3}{x-1} \geq 1 \;\Leftrightarrow\; \frac{-2}{x-1} \geq 0 \;\Leftrightarrow\; x-1 \leq 0.$$
  Le premier ensemble solution est ainsi $]-\infty, 1]$. La deuxième inéquation donne
  $$\frac{x-3}{x-1} \leq 3 \;\Leftrightarrow\; \frac{x-3}{x-1} - 3 \leq 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{-2x}{x-1} \leq 0.$$
  Un tableau de signe donne alors que le deuxième ensemble solution est alors $]-\infty, 0] \cup [3, +\infty[$.
  On obtient ainsi, en faisant l'intersection de ces deux ensembles et en vérifiant qu'on est bien aussi dans $]-\infty, 1[\cup[3, +\infty[$, que $\mathcal{S}_1 =]-\infty, 0]$.
- Cas 2 : $\frac{x-3}{x-1} \leq 0 \Leftrightarrow x \in]1, 3]$.
  On doit alors résoudre l'inéquation $1 \leq -\frac{x-3}{x-1} \leq 3$. Les réels x doivent donc vérifier $1 \leq \frac{3-x}{x-1}$ et $\frac{3-x}{x-1} \leq 3$. La résolution de la première inéquation donne
  $$\frac{3-x}{x-1} \geq 1 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{-2x+4}{x-1} \geq 0.$$
  Un tableau de signe permet de trouver le premier ensemble de définition. Le premier ensemble solution est ainsi $]1, 2]$. La deuxième inéquation donne
  $$\frac{3-x}{x-1} \leq 3 \;\Leftrightarrow\; \frac{3-x}{x-1} - 3 \leq 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{-2x+3}{x-1} \leq 0.$$
  Un tableau de signe donne alors que le deuxième ensemble solution est alors $\left[\frac{3}{2}, 3\right]$.
  On obtient ainsi, en faisant l'intersection de ces deux ensembles et en vérifiant qu'on est bien aussi dans $]1, 3]$, que $\mathcal{S}_2 = \left[\frac{3}{2}, 2\right]$.

Synthèse : l'ensemble des solutions correspond alors à la réunion des deux sous-ensembles $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$. Ainsi, on obtient : $\boxed{\mathcal{S} =]-\infty, 0] \cup \left[\frac{3}{2}, 2\right]}$.

Correction 11.

1. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $\mathbf{e^x - 1 \geq \sqrt{e^{x+1} - e^x - e + 1}}$:**

- $\star$ Domaine de définition : l'inéquation est bien définie si et seulement si
$$e^{x+1}-e^x-e+1\geq 0 \Leftrightarrow (e-1)e^x-e+1\geq 0 \Leftrightarrow e^x\geq \frac{e-1}{e-1}$$
car $e-1>0$. Ainsi on obtient que : $e^{x+1}-e^x-e+1\geq 0 \Leftrightarrow e^x\geq 1 \Leftrightarrow x\geq 0$ en composant par la fonction ln qui est bien strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+\star}$. Ainsi $\mathcal{D}=\mathbb{R}^+$.
- $\star$ On peut remarquer que sur $\mathcal{D}$, on a toujours $e^x-1\geq 0$. Ainsi les deux termes de l'inéquation sont toujours positifs et on peut passer au carré tout en conservant l'équivalence. On obtient que :
$$e^x-1\geq \sqrt{e^{x+1}-e^x-e+1} \Leftrightarrow e^{2x}-(1+e)e^x+e\geq 0.$$
On pose alors $X=e^x$ et on doit résoudre $X^2-(1+e)X+e\geq 0$. Le discriminant vaut $\Delta=(e-1)^2$ et les racines sont 1 et e. Ainsi on obtient :
$$e^x-1\geq \sqrt{e^{x+1}-e^x-e+1} \Leftrightarrow e^x\leq 1 \text{ ou } e^x\geq e \Leftrightarrow x\leq 0 \text{ ou } x\geq 1$$
en composant par la fonction ln qui est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+\star}$. Comme $\mathcal{D}=\mathbb{R}^+$, on obtient que :
$$e^x-1\geq \sqrt{e^{x+1}-e^x-e+1} \Leftrightarrow x=0 \text{ ou } x\geq 1.$$
- $\star$ Conclusion : $\boxed{\mathcal{S}=[1,+\infty[\cup\{0\}}$.

2. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $\mathbf{x\sqrt{x}-4x-\sqrt{x}+4>0}$:**

- $\star$ Domaine de définition : L'inéquation est bien définie sur $\mathcal{D}=\mathbb{R}^+$.
- $\star$ On pose $X=\sqrt{x}$ et l'inéquation revient à : $X^3-4X^2-X+4>0$. 1 est racine évidente et on peut donc factoriser par $X-1$. Par identification des coefficients d'un polynôme, on obtient que : $X^3-4X^2-X+4=(X-1)(X^2-3X-4)$. Ainsi : $X^3-4X^2-X+4>0 \Leftrightarrow (X-1)(X^2-3X-4)>0$. Le discriminant de X^2-3X-4 vaut $\Delta=25$ et les racines sont -1 et 4. Un tableau de signe donne dont : $X^3-4X^2-X+4>0 \Leftrightarrow -1<X<1$ ou $X>4$. Comme $X=\sqrt{x}$ et qu'une racine carrée est un nombre toujours positif ou nul, on obtient que : $x\sqrt{x}-4x-\sqrt{x}+4>0 \Leftrightarrow \sqrt{x}<1$ ou $\sqrt{x}>4$. Dans les deux inégalités, les deux termes sont bien positifs, on peut donc bien passer au carrée tout en conservant l'équivalence et on obtient ainsi :
$$x\sqrt{x}-4x-\sqrt{x}+4>0 \Leftrightarrow x<1 \text{ ou } x>16.$$
- $\star$ Conclusion : $\boxed{\mathcal{S}=[0,1[\cup]16,+\infty[}$ en prenant en compte le domaine de résolution.

3. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $\frac{\ln(x^2)+1}{\ln(x)+1}<0$:**

4. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $\sqrt{\mathbf{9^x-1}}>\mathbf{3^x-2}$:**

- $\star$ Domaine de définition : L'inéquation est bien définie si : $9^x-1\geq 0 \Leftrightarrow e^{x\ln 9}\geq 1 \Leftrightarrow x\ln 9\geq 0$ en composant par la fonction ln qui est bien strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+\star}$. Ainsi comme $\ln 9>0$, on obtient que : $\mathcal{D}=\mathbb{R}^+$.
- $\star$ On doit ensuite étudier deux cas :
  - Cas 1 : si $3^x-2<0 \Leftrightarrow x<\dfrac{\ln 2}{\ln 3}$: on ne peut pas élever au carré.
    On se place donc sur $\left[0,\dfrac{\ln 2}{\ln 3}\right[$. Sur cet ensemble l'inéquation est toujours vérifiée car une racine carrée est un nombre positif ou nul et elle est donc bien toujours supérieure ou égale à un nombre strictement négatif. Donc $\mathcal{S}_1=\left[0,\dfrac{\ln 2}{\ln 3}\right[$.

- Cas 2 : si $3^x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \dfrac{\ln 2}{\ln 3}$.
  On se place donc sur $\left[\dfrac{\ln 2}{\ln 3}, +\infty\right[$. Sur cet ensemble, les deux termes sont positifs et on peut donc passer au carré tout en conservant l'équivalence. Ainsi on obtient que :
  $$\sqrt{9^x - 1} > 3^x - 2 \Leftrightarrow 9^x - 1 > 3^{2x} - 4 \times 3^x + 4 \Leftrightarrow 4 \times 3^x - 5 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{\ln\left(\frac{5}{4}\right)}{\ln 3}$$
  en composant par la fonction $\ln$ qui est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et car $\ln 3 > 0$. Or on est sur $\left[\dfrac{\ln 2}{\ln 3}, +\infty\right[$ et comme $\dfrac{5}{4} < 2$ et que la fonction $\ln$ est strictement croissante, on obtient que $\dfrac{\ln\left(\frac{5}{4}\right)}{\ln 3} < \dfrac{\ln 2}{\ln 3}$, on obtient que : $\mathcal{S}_2 = \left[\dfrac{\ln 2}{\ln 3}, +\infty\right[$.

Synthèse : $\boxed{\mathcal{S} = \mathbb{R}^+}$.