# TD 2 - Fonctions usuelles réelles

## I Valeur absolue

**Exercice 1.** Résolution d'équations et d'inéquations avec des valeurs absolues :

1. $|2+x|+2+2x=x^2$
2. $x^2=|x|$
3. $|2x-3|\leq 2$
4. $|2x+3|-|-5x+6|\geq 3x+2$
5. $|x^2-1|\leq 2|x|$
6. $||x|-5|\geq ||3x|-3|$
7. $\sqrt{x^2-x-2}\geq |3x+2|$
8. $\dfrac{x^2+\sqrt{2}x}{|x^2-1|+1}\geq 1$

## II Partie entière

**Exercice 2.** On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x-\lfloor x\rfloor}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de $f$.
2. Montrer que $f$ est périodique de période 1.
3. Donner une expression simplifier de $f$ sur les intervalles de la forme $]k,k+1[$, $k\in\mathbb{N}$.
4. Soit $x\in\mathbb{R}$. Montrer que $x$ est rationnel si et seulement si $f(x)$ est rationnel.

**Exercice 3** (Problème)**.** On considère l'équation suivante d'inconnue $x\in\mathbb{R}$ :

$$\left\lfloor 2x-\sqrt{5x-1}\right\rfloor = 0 \tag{$E$}$$

1. Déterminer le domaine de définition de $E$.
2. Pour tout $a\in\mathbb{R}$, rappeler un encadrement de la partie entière de $a$ en fonction de $a$.
3. Montrer que résoudre $(E)$ revient à résoudre deux inéquations qu'on déterminera.
4. Résoudre les deux équations obtenues à la question précédente.
5. Résoudre $(E)$.

**Exercice 4.** Montrer que la fonction partie entière est croissante, ie montrer que pour tout $x,y\in\mathbb{R}^2$, :

$$x\leq y \Longrightarrow \lfloor x\rfloor \leq \lfloor y\rfloor .$$

Montrer que pour tout $x,y\in\mathbb{R}^2$, :

$$\lfloor x\rfloor+\lfloor y\rfloor \leq \lfloor x+y\rfloor \leq \lfloor x\rfloor+\lfloor y\rfloor+1.$$

**Exercice 5.** Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}_+$ :

$$\lfloor x\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{2}\right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{2}\right\rfloor .$$

## III Racine carrée

**Exercice 6.** On considère l'expression $R(a)=\sqrt{a+2\sqrt{a-1}}+\sqrt{a-2\sqrt{a-1}}$.

1. Pour quels valeurs de $a$, $R(a)$ est-elle bien définie ?
2. Pour ces valeurs, simplifier l'expression $R(a)$. Tracer la fonction $a\mapsto R(a)$.

**Exercice 7.** Déterminer en fonction du paramètre $m\in\mathbb{R}$ l'ensemble de définition de la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ donnée par

$$f(x)=\sqrt{x^2-(m+1)x+m}.$$

## IV Exponentielle et logarithme

**Exercice 8.** Résolution d'équations et d'inéquations avec les fonctions $\ln$, $\exp$ et $x \mapsto a^x$ :

1. $\ln(x^2 - 4e^2) < 1 + \ln(3x)$
2. $\ln(1 + e^{-x}) < x$
3. $|\ln x| < 1$
4. $\ln(2x+4) - \ln(6-x) = \ln(3x-2) - \ln(x)$
5. $e^{3x} - 6e^{2x} + 8e^x > 0$
6. $2^{2x+1} + 2^x = 1$
7. $e^{3x} - e^{2x} - e^{x+1} + e \leq 0$.
8. $(\ln x)^2 - 3\ln x - 4 \leq 0$
9. $2e^{2x} - e^x - 1 \leq 0$
10. $2\ln(x) + \ln(2x-1) > \ln(2x+8) + 2\ln(x-1)$
11. $4e^x - 3e^{\frac{x}{2}} \geq 0$
12. $e^x - e^{-x} = 3$
13. $9^x - 2 \times 3^x - 8 > 0$

**Exercice 9.** À l'aide d'une étude de fonction, démontrer les inégalités suivantes :

1. $\forall x > 0,\ x - \dfrac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$
2. $\forall x \in \mathbb{R}^+ : e^x - \dfrac{x^2}{2} \geq 1$.

**Exercice 10.** Pour chacune des expressions, donner le domaine de définition et simplifier quand c'est possible.

1. $f(x) = x \ln \sqrt{e^{\frac{x}{2}}} + \left(\sqrt{e^{2\ln(2x-1)}}\right)^3$.
2. $g(x) = e^{\sqrt{\ln x}} + e^{(\ln x)^2}$.