Programme de colle : Semaine 3
Lundi 2 octobre

I Cours

1. Sommes - Produits - Récurrences
   (a) Raisonnement par récurrence.
   (b) Notations Σ et $\prod$.
   (c) Les sommes suivantes sont à connaître : $\sum_{k=1}^{n} 1$, $\sum_{k=1}^{n} k$, $\sum_{k=0}^{n} q^n$ (Les preuves des deux dernières sont exigibles)
   (d) Linéarité de la somme.
   (e) Relation de Chasles
   (f) Changement d'indice.
   (g) Sommes télescopiques.
   (h) Définition de la factorielle.
   (i) Définition des coefficients binomiaux $\binom{n}{p}$
   (j) Binôme de Newton (preuve non exigible)
2. Suites réelles usuelles
   (a) Suites arithmétiques, géométriques.
   (b) Suites arithmético-géométriques (AG) : savoir donner une forme close d'une suite AG.
   (c) Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 (SRL_2) : savoir donner une forme close d'une suite SRL_2 quand le discriminant est positif ou nul (⚠ les complexes n'ont pas encore été vus !)
   (d) Limites
      i. Théorème d'encadrement (dit théorème des « gendarmes »)
      ii. Théorème de comparaison des limites (si $u_n \leq v_n$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers ℓ, ℓ' alors $\ell \leq \ell'$)
      iii. Théorème de convergence des suites monotones.
      iv. Suites adjacentes (definition et théorème de convergence)

II Exercices Types

1. Prouver
$$\binom{n}{p-1} + \binom{n}{p} = \binom{n+1}{p}$$
$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
2. Exprimer en fonction de n, $\sum_{k=3}^{n-1} \binom{n}{k}$
3. Exprimer en fonction de n, $\sum_{k=1}^{n^2} 3^k \frac{1}{2^{2k+1}}$
4. Exprimer en fonction de n, $\prod_{k=0}^{n} \exp(\frac{k}{n})$

5. Exprimer u_n en fonction de n pour les suites suivantes :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = 2u_n + 1 \quad \text{pour } n \geq 0$$

$$u_0 = 1, u_1 = 2 \quad \text{et} \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \quad \text{pour } n \geq 0$$

$$u_0 = 1, u_1 = 2 \quad \text{et} \quad u_{n+2} = 2u_{n+1} + u_n \quad \text{pour } n \geq 0$$

6. Etudier la convergence de

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n}$$

7. On note $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

   (a) Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.

   (b) Montrer que pour tout $k \geq 2$

   $$\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

   (c) En déduire que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $\ell \in [0, 2]$.

8. Etudier la convergence de

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n(n!)}$$