DM1

Exercice 1. On note $\Delta(m) = m^2 - 8m + 12$.

1. Résoudre l'inéquation d'inconnue m :
$$\Delta(m) > 0 \tag{I_1}$$
2. On note $r_+(m) = \frac{m+\sqrt{\Delta(m)}}{4}$ et $r_-(m) = \frac{m-\sqrt{\Delta(m)}}{4}$.
3. Résoudre
$$r_+(m) \geq 1 \quad \text{et} \quad r_-(m) \geq 1.$$
4. Résoudre l'inéquation d'inconnue y et de paramétre $m \in \mathbb{R}$
$$\frac{2y^2 - \frac{3}{2}}{y-1} \geq m \tag{I_2}$$

Correction 1.

1. Le discriminant réduit de $\Delta(m)$ vaut $\delta(m) = 16 - 12 = 4$. Les racines de $\delta(m)$ valent donc $m_1 = 4 - 2 = 2$ et $m_2 = 4 + 2 = 6$. Donc $\Delta(m) = (m-2)(m-6)$ et les solutions de $\Delta(m) > 0$ sont
$$\mathcal{S} =]-\infty, 2[\cup]6, +\infty[.$$
2. Les expressions $r_+(m)$ et $r_-(m)$ sont définies pour $\Delta(m) \geq 0$ soit $m \in]-\infty, 2] \cup [6, +\infty[$.
Résolvons $r_+(m) \geq 1$ pour $m \in]-\infty, 2] \cup [6, +\infty[$.
$$\begin{aligned} & \frac{m+\sqrt{\Delta(m)}}{4} \geq 1 \\ \iff \quad & m + \sqrt{\Delta(m)} \geq 4 \\ \iff \quad & \sqrt{\Delta(m)} \geq 4 - m \end{aligned}$$
Si $\underline{(4-m) < 0}$, m est solution car $\sqrt{\Delta(m)} \geq 0$.

Si $\underline{(4-m) \geq 0}$, l'équation $r_+(m) \geq 1$ est équivalente à
$$\begin{aligned} & \Delta(m) \geq (4-m)^2 \\ \iff \quad & m^2 - 8m + 12 \geq m^2 - 8m + 16 \\ \iff \quad & 0 \geq 4 \end{aligned}$$
Donc pour tout $m \leq 4$, m n'est pas solution.
Finalement, les solutions de $r_+(m) \geq 1$ sont
$$\mathcal{S}_+ = [6, +\infty[.$$

Résolvons $r_-(m) \geq 1$ pour $m \in]-\infty, 2] \cup [6, +\infty[$.

$$\begin{aligned} & \frac{m - \sqrt{\Delta(m)}}{4} \geq 1 \\ \iff \quad & m - \sqrt{\Delta(m)} \geq 4 \\ \iff \quad & m - 4 \geq \sqrt{\Delta(m)} \end{aligned}$$

Si $\underline{(m-4) < 0}$, m n'est pas solution car $\sqrt{\Delta(m)} \geq 0$.

Si $\underline{(m-4) \geq 0}$, l'équation $r_-(m) \geq 1$ est équivalente à

$$\begin{aligned} & (m-4)^2 \geq \Delta(m) \\ \iff \quad & m^2 - 8m + 16 \geq m^2 - 8m + 12 \\ \iff \quad & 4 \geq 0 \end{aligned}$$

Donc pour tout $m \geq 4$, m est solution.
Finalement, les solutions de $r_-(m) \geq 1$ sont

$$\mathcal{S}_+ = [6, +\infty[.$$

3. L'ensemble de définition de $\frac{2y^2 - \frac{3}{2}}{y-1}$ est $D_1 = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. On va résoudre

$$\frac{2y^2 - \frac{3}{2}}{y-1} \geq m \qquad (I_4(m))$$

en fonction de $m \in \mathbb{R}$.

Pour tout $y \in D_1$ on a

$$\begin{aligned} \frac{2y^2 - \frac{3}{2}}{y-1} - \frac{m(y-1)}{y-1} &\geq 0 \\ \frac{2y^2 - \frac{3}{2} - m(y-1)}{y-1} &\geq 0 \\ \frac{2y^2 - my + (-\frac{3}{2} + m)}{y-1} &\geq 0 \end{aligned}$$

Le discriminant de $2y^2 - my + (\frac{3}{2} + m)$ vaut

$$m^2 - 4(2)(-\frac{3}{2} + m) = m^2 - 8m + 12.$$

On reconnait l'expression de $\Delta(m)$.

(a) D'après la question 1, $\Delta(m) > 0$ pour $m \in]-\infty, 2[\cup]6, +\infty[$. Sur cet ensemble le polynôme $2y^2 - my + (-\frac{3}{2} + m)$ admet deux racines, $r_-(m)$ et $r_+(m)$. Donc

$$2y^2 - my + (-\frac{3}{2} + m) = 2(y - r_-(m))(y - r_+(m)).$$

Pour $m \geq 6$, d'après la question 2, on a :

$$r_+(m) \geq r_-(m) \geq 1$$

On note $q(y) = 2y^2 - my + (-\frac{3}{2} + m)$

y	$-\infty$		1		$r_-(m)$		$r_+(m)$
$q(y)$		$+$		$+$	0	$-$	0
$y-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{q(y)}{y-1}$		$-$		$+$	0	$-$	0

Les solutions de l'équation $I_4(m)$ pour $m \geq 6$ sont

$$\boxed{S =]1, r_-(m)] \cup [r_+(m), +\infty[}$$

Pour $m \leq 2$, d'après la question 2, on a :

$$1 \geq r_+(m) \geq r_-(m)$$

y	$-\infty$		$r_-(m)$		$r_+(m)$		1		$+\infty$
$q(y)$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$y-1$		$-$		$-$		$-$		$+$	
$\frac{q(y)}{y-1}$		$-$	0	$+$	0	$-$		$+$	

Les solutions de l'équation $I_4(m)$ pour $m \leq 2$ sont

$$\boxed{S = [r_-(m), r_+(m)] \cup]1, +\infty[.}$$

4. Pour $\Delta(m) = 0$, c'est-à-dire $m \in 2, 6$. Pour $m = 2$, on a $r_+(2) = r_-(2) = \frac{1}{2}$ et

$$2y^2 - 2y + (-\frac{3}{2} + 2) = 2(y - \frac{1}{2})^2$$

et les solutions de I_2 sont donc

$$\boxed{S = \{\tfrac{1}{2}\} \cup]1, +\infty[.}$$

Pour $m = 6$, on a $r_+(6) = r_-(6) = \frac{3}{2}$ et

$$2y^2 - 6y + (-\frac{3}{2} + 6) = 2(y - \frac{3}{2})^2$$

et les solutions de I_2 sont donc

$$\boxed{S =]1, +\infty[.}$$

5. Pour $\Delta(m) < 0$, c'est-à-dire $m \in]2, 6[$.
Le polynome q n'a pas de racine réelle. Il est donc strictement positif sur $\mathbb{R}$. Les solutions de $I_4(m)$ sont donc

$$\boxed{S =]1, +\infty[.}$$

Exercice 2. On cherche à résoudre l'équation (E) suivante, d'inconnue réelle x :

$$\lfloor \sqrt{x} \rfloor = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor$$

1. Donner le domaine de définition de l'équation (E).
2. Ecrire un programme python qui demande à l'utilisateur un flottant x et qui renvoie True si le réel ets solution de l'équation (E) et False sinon.
3. Montrer que toute solution x de (E) est solution du système (S) suivant :

$$\begin{cases} \sqrt{x} & < & \frac{x}{2} + 1 \\ \frac{x}{2} - 1 & < & \sqrt{x} \end{cases}$$

4. Résoudre le système (S).
5. Soit $\alpha = 2(2 + \sqrt{3})$ Calculer la partie entière de α.
6. Pour tout $k \in [\![0, 7]\!]$ déterminer si les réels de l'intervalle $[k, k+1[$ sont solutions de (E). (On détaillera les 8 cas)
7. Conclure.

Correction 2.

1. (E) est bien défini pour $x \geq 0$
2.
```
x=float(input('donnez une valeur de x' ))
if floor(sqrt(x))==floor(x/2):
        print(True)
else:
        print(false)
```
3. Rappelons l'inégalité vraie pour tout $y \in \mathbb{R}$:

$$y - 1 < \lfloor y \rfloor \leq y < \lfloor y \rfloor + 1$$

Soit x une solution de (E) on a d'une part :

$$\lfloor \sqrt{x} \rfloor = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor \leq \frac{x}{2}$$

et

$$\sqrt{x} - 1 < \lfloor \sqrt{x} \rfloor$$

Donc

$$\boxed{\sqrt{x} < \frac{x}{2} + 1}$$

D'autre part on a :

$$\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor = \lfloor \sqrt{x} \rfloor \leq \sqrt{x}$$

et

$$\frac{x}{2} - 1 < \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor$$

donc

$$\boxed{\tfrac{x}{2} - 1 < \sqrt{x}.}$$

4. — Résolvons la première inégalité : $\sqrt{x} < \frac{x}{2} + 1$
   - Cas 1 $\frac{x}{2}+1 \geq 0$ c'est-à-dire $x \geq -2$. Rappelons que l'ensemble de définion de l'équation est $x \geq 0$, on se concentre donc sur les réels positifs.
     On peut alors mettre l'équation au carré qui devient
     $$x < \frac{x^2}{4} + x + 1.$$
     D'où $x^2 > -4$ ce qui est toujours vrai.
     $$\boxed{\text{Les solutions de cette première inéquation sont } x \geq 0}$$
   - Cas 2 $\frac{x}{2} + 1 < 0$. Ce cas ne se produit pas car $x \geq 0$ pour que l'équation soit bien définie.

   — Résolvons la seconde inégalité : $\frac{x}{2} - 1 < \sqrt{x}$
   - Cas 1 $\frac{x}{2} - 1 \geq 0$ c'est-à-dire $x \geq 2$.
     On peut alors mettre l'équation au carré qui devient
     $$\frac{x^2}{4} - x + 1 < x$$
     D'où l'on obtient $\frac{x^2}{4} - 2x + 1 < 0$. Le discrimant vaut $\Delta = 4 - 1 = 3 > 0$ et on obtient 2 racines
     $$r_1 = \frac{2+\sqrt{3}}{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{2-\sqrt{3}}{\frac{1}{2}}$$
     soit en simplifiant
     $$r_1 = 2(2+\sqrt{3}) \quad \text{et} \quad r_2 = 2(2-\sqrt{3}).$$
     Le polynôme est strictement négatif entre les racines c'est-à-dire sur $]2(2-\sqrt{3}), 2(2+\sqrt{3})[$.
     On doit maintenant prendre l'intersection avec l'ensemble de définition : $x \geq 0$ et l'hypothèse $x \geq 2$ On obtient
     $$x \in [2, 2(2+\sqrt{3})[$$
   - Cas 2 $\frac{x}{2} - 1 < 0$ c'est-à-dire $x < 2$. Ici tous les réels sont solutions car la racine est toujours positive.
     On obtient donc $x \in [0, 2[$
     En conclusion, les solutions de cette deuxième équation sont
     $$\boxed{[0, 2(2+\sqrt{3})[}$$

Les solutions du système correspondent à l'intersection des deux enembles trouvés précédemment : c'est donc

$$\boxed{[0, 2(2+\sqrt{3})[}$$

5. $1 < 3 < 4$ donc $1 < \sqrt{3} < 2$ et donc $3 < 2+\sqrt{3} < 4$ et finalement $\alpha \in]6, 8[$. Ainsi $\lfloor \alpha \rfloor$ vaut 6 ou 7.
   Vérifions que $\alpha > 7$, pour cela regardons l'inégalité

$$\begin{array}{rrl} & 2(2+\sqrt{3}) & > 7 \\ \iff & (2+\sqrt{3}) & > \frac{7}{2} \\ \iff & \sqrt{3} & > \frac{3}{2} \\ \iff & 3 & > \frac{9}{4} \\ \iff & 12 & > 9 \end{array}$$

   La dernière inégalité étant vraie, comme nous avons procédé par équivalence, on a bien $\alpha > 7$. Ainsi

$$\boxed{\lfloor \alpha \rfloor = 7}$$

6. — <u>Cas $k = 0$</u> Soit $x \in [0, 1[$. On a alors $0 \leq \sqrt{x} < 1$ et donc $\lfloor x \rfloor = 0$ et $0 \leq \frac{x}{2} < \frac{1}{2} < 1$ donc $\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor = 0$. D'où

$$\boxed{\forall x \in [0, 1[\quad \lfloor \sqrt{x} \rfloor = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor}$$

   — <u>Cas $k = 1$</u> Soit $x \in [1, 2[$. On a alors $1 \leq \sqrt{x} < \sqrt{2} < 2$ et donc $\lfloor x \rfloor = 1$ et $0 \leq \frac{1}{2} \leq \frac{x}{2} < 1$ donc $\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor = 0$. D'où

$$\boxed{\forall x \in [1, 2[\quad \lfloor \sqrt{x} \rfloor \neq \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor}$$

   — <u>Cas $k = 2$</u> Soit $x \in [2, 3[$. On a alors $1 \leq \sqrt{2} \leq \sqrt{x} < \sqrt{3} < 2$ et donc $\lfloor x \rfloor = 1$ et $1 \leq \frac{x}{2} < \frac{3}{2} < 2$ donc $\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor = 1$. D'où

$$\boxed{\forall x \in [2, 3[\quad \lfloor \sqrt{x} \rfloor = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor}$$

   — <u>Cas $k = 3$</u>
   Soit $x \in [3, 4[$. On a alors $1 \leq \sqrt{3} \leq \sqrt{x} < \sqrt{4} = 2$ et donc $\lfloor x \rfloor = 1$ et $1 \leq \frac{3}{2} \leq \frac{x}{2} < 2$ donc $\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor = 1$. D'où

$$\boxed{\forall x \in [3, 4[\quad \lfloor \sqrt{x} \rfloor = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor}$$

   — <u>Cas $k = 4$</u> Soit $x \in [4, 5[$. On a alors $2 \leq \sqrt{x} < \sqrt{5} < 3$ et donc $\lfloor x \rfloor = 2$ et $2 \leq \frac{x}{2} < \frac{5}{2} < 3$ donc $\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor = 2$. D'où

$$\boxed{\forall x \in [4, 5[\quad \lfloor \sqrt{x} \rfloor = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor}$$

   — <u>Cas $k = 5$</u> Soit $x \in [5, 6[$. On a alors $2 \leq \sqrt{x} < \sqrt{5} < 3$ et donc $\lfloor x \rfloor = 2$ et $2 \leq \frac{x}{2} < \frac{5}{2} < 3$ donc $\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor = 2$. D'où

$$\boxed{\forall x \in [5, 6[\quad \lfloor \sqrt{x} \rfloor = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor}$$

— <u>Cas $k = 6$</u> Soit $x \in [6, 7[$. On a alors $2 \leq \sqrt{6} \leq \sqrt{x} < \sqrt{7} < 3$ et donc $\lfloor x \rfloor = 2$ et $3 \leq \frac{x}{2} < \frac{7}{2} < 4$ donc $\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor = 3$. D'où

$$\boxed{\forall x \in [6, 7[\quad \lfloor \sqrt{x} \rfloor \neq \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor}$$

— <u>Cas $k = 7$</u> Soit $x \in [7, 8[$. On a alors $2 \leq \sqrt{7} \leq \sqrt{x} < \sqrt{8} < 3$ et donc $\lfloor x \rfloor = 2$ et $3 \leq \frac{7}{2} \leq \frac{x}{2} < \frac{8}{2} = 4$ donc $\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor = 3$. D'où

$$\boxed{\forall x \in [7, 8[\quad \lfloor \sqrt{x} \rfloor \neq \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor}$$

7. On a vu à la question 4 que si x était solution de $\lfloor x \rfloor = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor$ alors $x \in [0, \alpha] \subset [0, 8[$.
Réciproquement, la question précédente permet de voir que x est solution si $x \in [0, 1[\cup [2, 3[\cup [3, 4[\cup [4, 5[\cup [5, 6[=$ $[0, 1[\cup [2, 6[$ et n'était pas solution pour $x \in [1, 2[\cup [6, 7[\cup [7, 8[$.

$$\boxed{\mathcal{S} = [0, 1[\cup [2, 6[}$$