Correction - DM2

Exercice 1. 1. Comparer (avec une inégalité large) pour tout $n \in \mathbb{N}$, les nombres n et 3^n. (Prouver cette inégalité)

2. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$$

(a) Enoncer l'inégalité triangulaire.

(b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq 4^n$.

Correction 1.

1. On va montrer par récurrence que $\mathcal{P}(n) : n \leq 3^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Initialisation : Pour $n = 0$, on a bien $0 \leq 3^0 = 1$. La propriété $\mathcal{P}$ est donc vraie au rang 0.
Hérédité :
Soit $n \geq 0$ fixé. On suppose la propriété vraie à l'ordre n. Montrons qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

On a par hypothèse de récurrence :
$$n + 1 \leq 3^n + 1$$
Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq 2 \times 3^n$ donc
$$3^n + 1 \leq 3 \times 3^n = 3^{n+1}$$
La propriété $\mathcal{P}$ est donc vraie au rang $n + 1$.
Conclusion :
Il résulte du principe de récurrence que pour tout $n \geq 0$:
$$\boxed{\mathcal{P}(n) : n \leq 3^n}$$

2. (a) Cf cours $\forall x, y \in \mathbb{R}^2$:
$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$
(b) On va montrer par récurrence que $\mathcal{P}(n) : |u_n| \leq 4^n$ et $|u_{n+1}| \leq 4^{n+1}$.
Initialisation : Pour $n = 0$, on a $|u_0| = 1 \leq 4^0 = 1$ et $|u_1| = 3 \leq 4^1$. La propriété est vraie au rang 0.
Hérédité :
Soit $n \geq 0$ fixé. On suppose la propriété vraie à l'ordre n. Montrons qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$: « $|u_{n+1}| \leq 4^{n+1}$ et $|u_{n+2}| \leq 4^{n+2}$ » est vraie.

$u_{n+1} \leq 4^{n+1}$ par hypothèse de récurrence. Il suffit donc de montrer que $|u_{n+2}| \leq 4^{n+2}$. On a

$$\begin{aligned}
|u_{n+2}| &= |3u_{n+1} - 2u_n| \quad \text{par définition de } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \\
&= |3u_{n+1}| + |2u_n| \quad \text{par l'inégalité triangulaire} \\
&\leq 3 * 4^{n+1} + 2 * 4^n \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\
&\leq 4^n(3 * 4 + 2) \\
&\leq 4^n(14) \\
&\leq 4^n(4^2) \\
&\leq 4^{n+2}
\end{aligned}$$

La propriété $\mathcal{P}$ est donc vraie au rang $n+1$.
Conclusion :
Il résulte du principe de récurrence que pour tout $n \geq 0$:

$$\boxed{\mathcal{P}(n) : |u_n| \leq 4^n}$$

Exercice 2. Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et pour tout $n \geq 0$

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} F_{2k+1} = F_{2n+2}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} F_{2k} = F_{2n+1} - 1$.
2. Montrer que pout tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} F_k^2 = F_n F_{n+1}$.
3. (a) On note $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Montrer que $\varphi^2 = \varphi + 1$ et $\psi^2 = \psi + 1$.
   (b) Montrer que l'expression explicite de F_n st donnée par $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n - \psi^n)$.
   (c) En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi$.

Correction 2.

1. Nous allons montrer ces propriétés par récurrence sur l'entier $n \in \mathbb{N}$. Soit $\mathcal{P}(n)$ la prorpriété définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\mathcal{P}(n) := \text{« } \sum_{k=0}^{n} F_{2k+1} = F_{2n+2} \text{ et } \sum_{k=0}^{n} F_{2k} = F_{2n+1} - 1 \text{ ».}$$

Montrons $\mathcal{P}(0)$. Vérifions la première égalité :

$$\sum_{k=0}^{0} F_{2k+1} = F_{0+1} = F_1 = 1$$

et

$$F_2 = F_1 + F_0 = 1$$

Donc la première égalité est vraie au rang 0.
Vérifions la sedonde égalité :

$$\sum_{k=0}^{0} F_{2k} = F_0 = 0$$

et

$$F_{2*0+1} - 1 = F_1 - 1 = 0$$

Donc la seconde égalité est vraie au rang 0. Ainsi $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Hérédité :
Soit $n \geq 0$ fixé. On suppose la propriété vraie à l'ordre n. Montrons qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Considérons la première égalité de $\mathcal{P}(n+1)$. Son membre de gauche vaut :

$$\sum_{k=0}^{n+1} F_{2k+1} = \sum_{k=0}^{n} F_{2k+1} + F_{2n+3}$$

Par hypothèse de récurrence on a $\sum_{k=0}^{n} F_{2k+1} = F_{2n+2}$, donc

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} F_{2k+1} &= F_{2n+2} + F_{2n+3}. \\ &= F_{2n+4}. \quad \text{d'après la définition de } (F_n)_{n\in\mathbb{N}} \\ &= F_{2(n+1)+2}.\end{aligned}$$

La première égalité est donc héréditaire.
Considérons la sedonde égalité de $\mathcal{P}(n+1)$. Son membre de gauche vaut :

$$\sum_{k=0}^{n+1} F_{2k} = \sum_{k=0}^{n} F_{2k} + F_{2n+2}$$

Par hypothèse de récurrence on a $\sum_{k=0}^{n} F_{2k} = F_{2n+1} - 1$, donc

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} F_{2k} &= F_{2n+1} - 1 + F_{2n+2}. \\ &= F_{2n+3} - 1. \quad \text{d'après la définition de } (F_n)_{n\in\mathbb{N}} \\ &= F_{2(n+1)+1} - 1.\end{aligned}$$

La seconde égalité est donc héréditaire. Finalement la propriété $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Conclusion :
Il résulte du principe de récurrence que pour tout $n \geq 0$:

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} F_{2k+1} = F_{2n+2} \text{ et } \sum_{k=0}^{n} F_{2k} = F_{2n+1} - 1}$$

2. On va montrer par récurrence que $\mathcal{P}(n) : \displaystyle\sum_{k=0}^{n} F_k^2 = F_n F_{n+1}$.

   Initialisation : Pour $n = 0$, on a $\sum_{k=0}^{0} F_k^2 = F_0^2 = 0$ et $F_0 F_1 = 0$. La propriété est donc vraie au rang 0.

   Hérédité :

   Soit $n \geq 0$ fixé. On suppose la propriété vraie à l'ordre n.

   On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} F_k^2 = \sum_{k=0}^{n} F_k^2 + F_{n+1}^2$ Par hypothèse de récurrence on a $\sum_{k=0}^{n} F_k^2 = F_n F_{n+1}$ donc :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} F_k^2 &= F_n F_{n+1} + F_{n+1}^2 \\
&= F_{n+1}(F_n + F_{n+1}) \\
&= F_{n+1} F_{n+2} \quad \text{par définition de } (F_n)_{n \in \mathbb{N}}
\end{aligned}$$

   La propriété $\mathcal{P}$ est donc vraie au rang $n + 1$.

   Conclusion :

   Il résulte du principe de récurrence que pour tout $n \geq 0$:

$$\boxed{\mathcal{P}(n) : \sum_{k=0}^{n} F_k^2 = F_n F_{n+1}}$$

3. Le polynôme du second degrès $X^2 - X - 1$ a pour discriminant $\Delta = 1 + 4 = 5$ les racines sont donc $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. En particulier, ces nombres vérifient : $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$ et $\psi^2 - \psi - 1 = 0$, c'est-à-dire

$$\boxed{\varphi^2 = \varphi + 1 \text{ et } \psi^2 = \psi + 1.}$$

4. Notons :$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n - \psi^n)$ On a

$$u_0 = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^0 - \psi^0) = 0$$

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^1 - \psi^1) = 1$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\begin{aligned}
u_{n+2} &= \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^{n+2} - \psi^{n+2}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^{n}(\varphi^2) - \psi^{n}(\psi^2)) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^{n}(\varphi+1) - \psi^{n}(\psi+1)) \quad \text{D'après la question précédente} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^{n+1} + \varphi^n - \psi^{n+1} - \psi^n) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^{n+1} - \psi^{n+1}) + \frac{1}{\sqrt{5}}\varphi^n - \psi^n) \\
&= u_{n+1} + u_n
\end{aligned}$$

Donc u_n satisfait aussi la relation de récrurrence. Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n - \psi^n)$.

5. D'après la question précédente on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{\varphi^{n+1} - \psi^{n+1}}{\varphi^n - \psi^n}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
\frac{F_{n+1}}{F_n} &= \varphi \frac{\varphi^n \left(1 - \frac{\psi^{n+1}}{\varphi^{n+1}}\right)}{\varphi^n \left(1 - \frac{\psi^n}{\varphi^n}\right)} \\
&= \varphi \frac{1 - \left(\frac{\psi}{\varphi}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{\psi}{\varphi}\right)^{n}}
\end{aligned}$$

Remarquons que $|\varphi| > |\psi|$ en particulier $|\frac{\psi}{\varphi}| < 1$ et donc

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\psi}{\varphi}\right)^{n+1} = 0.$$

Finalemetn

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi.}$$