Correction - DS1

Exercice 1. Donner la valeur des sommes et produits suivants :

$$S_1 = \sum_{k=1}^{5} k, \quad S_2 = \sum_{k=0}^{5} 2, \quad S_3 = \sum_{k=0}^{5} 2k.$$

$$P_1 = \prod_{k=1}^{5} (-1)^k, \quad P_2 = \prod_{k=0}^{5} 2, \quad P_3 = \prod_{k=0}^{5} 2k.$$

Correction 1.

Exercice 2. On considère l'équation suivante d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\lfloor 2x - \sqrt{5x-1} \rfloor = 0 \qquad (E)$$

1. Déterminer le domaine de définition de (E).
2. Dire (en justifiant !) si les réels suivants sont solutions ou non de (E)

$$x_1 = \frac{1}{5},\ x_2 = \frac{1}{2},\ x_3 = 1,\ x_4 = 12$$

3. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, rappeler un encadrement de la partie entière de a en fonction de a.
4. Montrer que résoudre (E) est équivalent à résoudre le système :

$$\begin{cases} \sqrt{5x-1} > & 2x - 1 \qquad (E_1) \\ \sqrt{5x-1} \leq & 2x \qquad\quad\ (E_2) \end{cases}$$

5. Résoudre les deux inéquations obtenues à la question précédente.
6. Résoudre (E).

Correction 2.

1. Seule la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas définie sur $\mathbb{R}$ mais sur $\mathbb{R}_+$ ainsi (E) est bien définie pour tout x tel que $5x - 1 \geq 0$ c'est-à-dire

$$\boxed{D_E = [\tfrac{1}{5}, +\infty[}$$

2. Cours

$$\boxed{\forall a \in \mathbb{R} \quad a - 1 < \lfloor a \rfloor \leq a}$$

3. Notons $f(x) = \lfloor 2x - \sqrt{5x-1} \rfloor$ On a $f(\frac{1}{5}) = \left\lfloor 2\frac{1}{5} - \sqrt{5\frac{1}{5} - 1} \right\rfloor = \lfloor 2\frac{1}{5} \rfloor = 0$ Donc

$$\boxed{\tfrac{1}{5} \text{ est solution de } E}$$

On a $f(\frac{1}{2}) = \left\lfloor 2\frac{1}{2} - \sqrt{5\frac{1}{2} - 1} \right\rfloor = \left\lfloor 1 - \sqrt{\frac{3}{2}} \right\rfloor$ Or $\frac{3}{2} > 1$ donc $\sqrt{\frac{3}{2}} > \sqrt{1} = 1$ et donc $1 - \sqrt{\frac{3}{2}} < 0$ ainsi

$$\boxed{\frac{1}{2} \text{ n'est pas solution de } E}$$

On a $f(1) = \lfloor 2 \times 1 - \sqrt{5 - 1} \rfloor = \lfloor 2 - 2 \rfloor = \lfloor 0 \rfloor$

$$\boxed{1 \text{ est solution de } E}$$

On a $f(12) = \lfloor 2 \times 12 - \sqrt{60 - 1} \rfloor = \lfloor 24 - \sqrt{59} \rfloor$ Or$59 < 64 = 8^2$ donc $\sqrt{59} < 8$ et $24 - \sqrt{59} > 24 - 8 = 16$ ainsi $f(2) > 16$ et

$$\boxed{12 \text{ n'est pas solution de } E}$$

4. D'après ce qu'on vient de voir, pour tout $x \in D_E$ on a :

$$2x - \sqrt{5x - 1} - 1 < \left\lfloor 2x - \sqrt{5x - 1} \right\rfloor \leq 2x - \sqrt{5x - 1}$$

Si x est solution de (E) on a $\left\lfloor 2x - \sqrt{5x - 1} \right\rfloor = 0$ et donc l'équation (E) équivaut à $2x - \sqrt{5x - 1} - 1 < 0 \leq 2x - \sqrt{5x - 1}$, soit

$$\boxed{\begin{cases} \sqrt{5x - 1} > & 2x - 1 \qquad (E_1) \\ \sqrt{5x - 1} \leq & 2x \qquad (E_2) \end{cases}}$$

5. Résolvons ces deux inéquations. Tout d'abord la première :

$$\sqrt{5x - 1} > 2x - 1 \quad (E_1)$$

On distingue deux cas :

- Cas 1 : $2x - 1 \geq 0$ c'est-à-dire $x \geq \frac{1}{2}$
  Alors on peut passer au carré dans l'équation car les deux cotés sont du même signe. On a alors :

$$\begin{aligned} (E_1) &\iff 5x - 1 > (2x - 1)^2 \\ &\iff 5x - 1 > 4x^2 - 4x + 1 \\ &\iff 4x^2 - 9x + 2 < 0 \end{aligned}$$

  Un petit discriminant comme on aime : $\Delta = 9^2 - 4 * 4 * 2 = 81 - 32 = 49 = 7^2$. $4x^2 - 9x + 2$ admet donc deux racines

$$r_1 = \frac{9 + 7}{8} = 2 \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{9 - 7}{8} = \frac{1}{4}$$

  Ainsi les solutions de (E_1) sur $[\frac{1}{2}, +\infty[$ sont

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_1 &=]\frac{1}{4}, 2[\cap [\frac{1}{2}, +\infty[\cap D_E \\ &= [\frac{1}{2}, 2[\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Les solutions de } (E_1) \text{ sur } [\tfrac{1}{2}, +\infty[\text{ sont } \mathcal{S}_1 = [\tfrac{1}{2}, 2[}$$

- ▶ <u>Cas 2 :</u> $2x - 1 < 0$ c'est-à-dire $x < \frac{1}{2}$
  Dans ce cas, tous les réels $x \in D_E$ sont solutions car le membre de gauche est positif et celui de droite négatif.

$$\boxed{\text{Les solutions de } (E_1) \text{ sur }]-\infty, \tfrac{1}{2}[\text{ sont } \mathcal{S}_1' = [\tfrac{1}{5}, \tfrac{1}{2}]}$$

En conclusion :

$$\boxed{\text{Les solutions de } (E_1) \text{ sur } D_E \text{ sont } \mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_1' = [\tfrac{1}{5}, 2[}$$

On fait la même chose pour (E_2)

$$\sqrt{5x-1} \leq 2x \quad (E_2)$$

On distingue deux cas :

- ▶ <u>Cas 1 :</u> $2x \geq 0$ c'est-à-dire $x \geq 0$
  Alors on peut passer au carré dans l'équation car les deux cotés sont du même signe. On a alors :

$$\begin{aligned}(E_1) &\iff 5x - 1 \leq (2x)^2 \\ &\iff 5x - 1 \leq 4x^2 \\ &\iff 4x^2 - 5x + 1 \geq 0\end{aligned}$$

Un petit discriminant comme on aime : $\Delta = 5^2 - 4 * 4 * 1 = 25 - 16 = 9 = 3^2$. $4x^2 - 5x + 1$ admet donc deux racines

$$r_1 = \frac{5+3}{8} = 1 \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{5-3}{8} = \frac{1}{4}$$

Ainsi les solutions de (E_2) sur $[0, +\infty[$ sont

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_2 &= (]-\infty, \frac{1}{4}] \cup [1, +\infty[) \cap [0, +\infty[\cap D_E \\ &= [\frac{1}{5}, \frac{1}{4}] \cup [1, +\infty[\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Les solutions de } (E_2) \text{ sur } [0, +\infty[\text{ sont } \mathcal{E}_2 = [\tfrac{1}{5}, \tfrac{1}{4}] \cup [1, +\infty[}$$

- ▶ <u>Cas 2 :</u> $2x < 0$ c'est-à-dire $x < 0$
  Dans ce cas, aucun réel n'est solution car le membre de gauche est positif et celui de droite négatif.

$$\boxed{\text{Les solutions de } (E_2) \text{ sur }]-\infty, 0[\text{ sont } \mathcal{E}_2' = \emptyset}$$

En conclusion :

$$\boxed{\text{Les solutions de } (E_2) \text{ sur } D_E \text{ sont } \mathcal{E} = \mathcal{E}_2 \cup \mathcal{E}_2' = [\tfrac{1}{5}, \tfrac{1}{4}] \cup [1, +\infty[}$$

6. x est solution de (E) si et seulement si il est solution de (E_1) et (E_2), l'ensemble des solutions correspond donc à l'intersection : $\mathcal{E} \cap \mathcal{S} = ([\frac{1}{5}, \frac{1}{4}] \cup [1, +\infty[) \cap [\frac{1}{5}, 2[= [\frac{1}{5}, \frac{1}{4}] \cup [1, 2[$

$$\boxed{\text{Les solutions de } (E) \text{ sont } [\tfrac{1}{5}, \tfrac{1}{4}] \cup [1, 2[}$$

Exercice 3. On souhaite résoudre l'inéquation suivante

$$I(a) \quad : \quad ax^2 - 2a^2x + ax - x + 2a - 1 \geq 0$$

d'inconnue x et de paramètre $a \in \mathbb{R}$.

1. A quelle.s condition.s sur a cette inéquation n'est-elle pas de degré 2 ? La résoudre pour la.les valeur.s correspondante.s

   Dans toute la suite de l'exercice nous supposerons que a est tel que l'inéquation est de degré 2.
2. Montrer alors que le discriminant de $ax^2 - 2a^2x + ax - x + 2a - 1$ en tant que polynome du second degre en x, vaut
$$\Delta(a) = 4a^4 - 4a^3 - 3a^2 + 2a + 1$$
3. Montrer que $\Delta(a) = (a-1)^2(2a+1)^2$
4. (a) Soit $\mathcal{M}$ l'ensemble des solutions de $\Delta(a) = 0$. Déterminer $\mathcal{M}$

   (b) Résoudre $I(a)$ pour $a \in \mathcal{M}$.

   On suppose désormais que $a \notin \mathcal{M}$.
5. (a) Justifier que $\Delta(a) > 0$ et exprimer $\sqrt{\Delta(a)}$ à l'aide de valeur absolue.

   (b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\{|x|, -|x|\} = \{x, -x\}$$

   (c) En déduire que l'ensemble des racines de $ax^2 - 2a^2x + ax - x + 2a - 1$ est
$$R = \left\{\frac{1}{a}, 2a - 1\right\}$$

   On note
$$r_1(a) = \frac{1}{a} \quad \text{et} \quad r_2(a) = 2a - 1$$
6. Résoudre $r_1(a) \geq r_2(a)$.
7. Conclure en donnant les solutions de $I(a)$ en fonction de a.

Correction 3.

1. L'équation n'est pas de degré 2 si et seulement si $a = 0$. Dans ce cas, l'inéquation devient
$$I(0) \quad : \quad -x - 1 \geq 0$$
   dont les solutions sont
$$\boxed{\mathcal{S}_0 =]-\infty, -1]}$$

2. Le discriminant vaut

$$\begin{aligned}\Delta(a) &= (-2a^2 + a - 1)^2 - 4a(2a - 1)\\ &= (4a^4 + a^2 + 1 - 4a^3 + 4a^2 - 2a) - 8a^2 + 4a\\ &= 4a^4 - 4a^3 - 3a^2 + 2a + 1\end{aligned}$$

3. Développons l'expression proposée :

$$\begin{aligned}(a-1)^2(2a+1)^2 &= (a^2 - 2a + 1)(4a^2 + 4a + 1)\\ &= (4a^4 + 4a^3 + a^2) + (-8a^3 - 8a^2 - 2a) + (4a^2 + 4a + 1)\\ &= 4a^4 - 4a^3 - 3a^2 + 2a + 1\end{aligned}$$

On retrouve bien l'expression obtenue dans la question précédente, on a donc

$$\boxed{\Delta(a) = (a-1)^2(2a+1)^2}$$

4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$, d'après la question précédente $\Delta(a)$ est le produit de deux carrés, et donc vérifie $\Delta(a) \geq 0$
On a par ailleurs pour tout $x \in \mathbb{R}$ $\sqrt{x^2} = |x|$, donc

$$\boxed{\sqrt{\Delta(a)} = |a-1||2a+1|}$$

5. Etudions ces ensembles en fonction du signe de x.
<u>Si $x \geq 0$</u>
$|x| = x$ et donc

$$\{|x|, -|x|\} = \{x, -x\}$$

<u>Si $x < 0$</u>
$|x| = -x$ et donc

$$\{|x|, -|x|\} = \{-x, x\} = \{x, -x\}$$

(un ensemble n'est pas ordonné)
Ainsi on a bien l'égalité voulue.

6. L'ensemble des deux racines est donc

$$R = \left\{\frac{2a^2 - a + 1 + \sqrt{\Delta(a)}}{2a}, \frac{2a^2 - a + 1 - \sqrt{\Delta(a)}}{2a}\right\}$$

Ce qui d'après la question 4a) donne

$$R = \left\{\frac{2a^2 - a + 1 + |a-1||2a+1|}{2a}, \frac{2a^2 - a + 1 - |a-1||2a+1|}{2a}\right\}$$

Et donc d'après la question 4b) cet ensemble est égal à

$$R = \left\{\frac{2a^2 - a + 1 + (a-1)(2a+1)}{2a}, \frac{2a^2 - a + 1 - (a-1)(2a+1)}{2a}\right\}$$

Enfin on a

$$(a-1)(2a+1) = 2a^2 - a - 1$$

et donc

$$R = \left\{ \frac{2a^2 - a + 1 + (2a^2 - a - 1))}{2a}, \frac{2a^2 - a + 1 - (2a^2 - a - 1)}{2a} \right\}$$

On calcule alors séparément ces deux expressions :

$$\frac{2a^2 - a + 1 + (2a^2 - a - 1))}{2a} = \frac{4a^2 - 2a}{2a} = 2a - 1$$

et

$$\frac{2a^2 - a + 1 - (2a^2 - a - 1))}{2a} = \frac{2}{2a} = \frac{1}{a}$$

On obtient bien

$$\boxed{R = \left\{\tfrac{1}{a},\, 2a-1\right\}}$$

7. Résolvons l'inéquation de l'énoncé :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{a} \geq 2a - 1 \\ \iff \quad & \frac{1}{a} - 2a + 1 \geq 0 \\ \iff \quad & \frac{1 - 2a^2 + a}{a} \geq 0 \\ \iff \quad & \frac{2a^2 - a - 1}{a} \leq 0 \\ \iff \quad & \frac{(2a+1)(a-1)}{a} \leq 0 \end{aligned}$$

Les solutions sont donc (faire un tableau de signes dans le doute)

$$\boxed{\mathcal{S} =]-\infty, \tfrac{-1}{2}] \cup]0, 1]}$$

8. Pour $a \in]-\infty, \frac{-1}{2}]$ les solutions de $I(a)$ sont :

$$\boxed{\mathcal{S}_a = [r_2(a), r_1(a)]}$$

Pour $a \in]\frac{-1}{2}, 0[$ les solutions de $I(a)$ sont :

$$\boxed{\mathcal{S}_a = [r_1(a), r_2(a)]}$$

Pour $a = 0$ les solutions de $I(a)$ sont :

$$\boxed{\mathcal{S}_0 =]-\infty, -1]}$$

Pour $a \in]0, 1]$ les solutions de $I(a)$ sont :

$$\boxed{\mathcal{S}_a =]-\infty, r_2(a)] \cup [r_1(a), +\infty[}$$

Enfin, pour $a \in]1, +\infty[$ les solutions de $I(a)$ sont :

$$\boxed{\mathcal{S}_a =]-\infty, r_1(a)] \cup [r_2(a), +\infty[}$$

Exercice 4. On souhaite résoudre l'équation suivante :

$$(E) \quad : \quad e^{2x} + 3e^x - 4e^{-x} \geq 0$$

d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

1. On pose $X = e^x$. Montrer que x est solution de (E) si et seulement si X est strictement positif et solution de
$$(E') \quad : \quad X^3 + 3X^2 - 4 \geq 0$$
2. Montrer que 1 est racine de $X^3 + 3X^2 - 4$.
3. Résoudre (E')
4. En déduire les solutions de (E)

Correction 4.

1. Remarquons que $X = e^x$ implique de X est positif. De plus
$$\begin{aligned} x \text{ solution de } (E) &\iff e^{2x} + 3e^x - 4e^{-x} \geq 0 \\ &\iff X^2 + 3X - 4\frac{1}{X} \geq 0 \\ &\iff X^3 + 3X^2 - 4 \geq 0 \quad \text{car } X \text{ est positif} \\ &\iff \ X \text{ solution de } (E') \end{aligned}$$
On obtient bien l'équivalence demandée.
2. Le calcul donne $1^3 + 3 \times 1^2 - 4 = 0$, donc
$$\boxed{1 \text{ est racine de } X^3 + 3X^2 - 4}$$
3. D'après la question précédente on peut factoriser $X^3 + 3X^2 - 4$ par $(X - 1)$. On obtient
$$X^3 + 3X^2 - 4 = (X - 1)(X^2 + 4X + 4)$$
On reconnait une identité remarquable
$$X^3 + 3X^2 - 4 = (X - 1)(X + 2)^2$$
Ainsi
$$(E') \iff (X - 1)(X + 2)^2 \geq 0$$
Les solutions de (E') sont donc
$$\boxed{\mathcal{S}' = \{-2\} \cup [1, +\infty[}$$

4. x est donc solution de (E) si et seulement si

$$e^x \in [1, +\infty[$$

Les solutions de (E) sont donc

$$\boxed{\mathcal{S} = [0, \infty[}$$

INFORMATIQUE

Exercice 5. Écrire une fonction `Benefice(pv,pc)` qui prend en argument le prix de vente `pv` et le prix de construction `pc` d'un objet et qui renvoie :

- `Profit =` le profit réalisé si le prix de vente est supérieur strictement au prix de construction ;
- `Perte =` la perte réalisée si le prix de vente est inférieur strictement au prix de construction ;
- `Ni profit ni perte` quand on n'est dans aucun des cas précédent.

Par exemple, `Benefice(280,320)` renvoie `Perte = 40`.

Correction 5.

```
def Benefice(pv, pc) :
    if pv > pc :
        return "Profit =", pv-pc
    elif pv < pc :
        return "Perte =", pc-pv
    else :
        return "Ni profti ni perte"
```

Exercice 6. 1. Écrire une fonction Python `f` qui prend en argument un flottant `x` et retourne la valeur de $x + \sqrt{x^2 - 2x}$ si cette valeur est bien définie et 'erreur' sinon.

2. On dispose de la fonction suivante où `x`, `y` sont deux flottants.

```
def mystere(x,y) :
    if f(x)=='erreur' or f(y)=='erreur' :
        return 'Probleme de variable'
    elif f(x) <= f(y) :
        return x
    else :
        return y
```

Qu'affiche la console avec les instructions suivantes

(a) `print(mystere(-2,5))`

(b) `print(mystere(3,-3))`

(c) `print(mystere(1,3))`

3. Écrire une fonction `argmin3(x, y, z)` qui renvoie `'Probleme de variable'` si la fonction n'est pas définie en l'une des variables et sinon renvoie parmi les trois valeurs `x`, `y` et `z`, celle en laquelle `f` est minimale.

Correction 6.

1. L'expression $x + \sqrt{x^2 - 2x}$ est bien définie si et seulement si

$$\begin{aligned} x^2 - 2x \geqslant 0 \quad &\iff (x-2)x \geqslant 0 \\ &\iff x \in]-\infty, 0] \cup [2, +\infty[\end{aligned}$$

```python
from math import sqrt
def f(x) :
    if 0 < x and x < 2 :
        return 'erreur'
    else :
        return x+sqrt(x**2-2*x)
```

2. (a) $f(-2) = 2 * (\sqrt{2} - 1) < 5 + \sqrt{15} = f(5)$. Donc la fonction `mystere` renvoie -2.

(b) $f(3) = 3 + \sqrt{3} > -3 + \sqrt{15} = f(-3)$. Donc la fonction `mystere` renvoie -3.

(c) 1 n'est pas dans l'ensemble de définition de f. Donc la fonction renvoie `Probleme de variable`.

```python
def argmin3(x,y,z) :
    if f(x) == 'erreur' or f(y) == 'erreur' or f(z) == 'erreur' :
        return 'Probleme de variable'
    elif f(x) <= f(y) and f(x) <= f(z) :
        return x
    elif f(y) <= f(x) and f(y) <= f(z) :
        return y
    else :
        return z
```