

Correction TD 2 - Fonctions usuelles

I Valeur absolue

Correction 1. Résolution d'équations et d'inéquations avec des valeurs absolues.

1. Résolution dans \mathbb{R} de $|2 + x| + 2 + 2x = x^2$:

Il y a une valeur absolue, on doit donc étudier deux cas :

- Cas 1 : si $2 + x \geq 0$, à savoir si $x \geq -2$. L'équation à résoudre est alors

$$2 + x + 2 + 2x = x^2 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 = 0$$

Le discriminant d'une telle équation est $\Delta = 25$, ainsi, les solutions sont $x_1 = -1$ et $x_2 = 4$. Elles sont bien toutes les deux supérieures à -2 , donc $\mathcal{S}_1 = \{-1, 4\}$.

- Cas 2, si $2 + x \leq 0$, à savoir si $x \leq -2$. L'équation à résoudre est alors

$$-2 - x + 2 + 2x = x^2 \Leftrightarrow x^2 - x = 0$$

Les solutions sont $x_1 = 0$ et $x_2 = -1$. Aucune des deux solutions trouvées n'appartient à l'intervalle $] -\infty, -2]$, ainsi $\mathcal{S}_2 = \{\emptyset\}$.

Synthèse : on obtient $\mathcal{S} = \{-1, 4\}$.

2. Résolution dans \mathbb{R} de $x^2 = |x|$:

Il y a une valeur absolue, on étudie donc deux cas :

- Cas 1 : si $x \geq 0$. L'équation à résoudre est alors équivalente à

$$x^2 = x \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x - 1) = 0.$$

L'ensemble des solutions est alors $\mathcal{S}_1 = \{0, 1\}$.

- Cas 2 : si $x \leq 0$. L'équation à résoudre est alors équivalente à

$$x^2 = -x \Leftrightarrow x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x(x + 1) = 0.$$

L'ensemble des solutions est alors $\mathcal{S}_2 = \{-1, 0\}$.

Synthèse : l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{-1, 0, 1\}$.

3. Résolution dans \mathbb{R} de $|2x - 3| \leq 2$:

On fait deux cas selon que $2x - 3 \geq 0$ ou $2x - 3 < 0$ et on obtient $\mathcal{S} = \left[\frac{1}{2}, \frac{5}{2} \right]$.

4. Résolution dans \mathbb{R} de $|2x + 3| - |-5x + 6| \geq 3x + 2$:

On commence par faire un tableau récapitulatif et on obtient :

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{6}{5}$	$+\infty$
$ 2x + 3 $	$-2x - 3$	0	$2x + 3$	$2x + 3$
$ -5x + 6 $	$-5x + 6$	$-5x + 6$	0	$5x - 6$
$ 2x + 3 - -5x + 6 $	$3x - 9$	$7x - 3$	$-3x + 9$	

On étudie alors les 3 cas et on obtient au final : $\boxed{\mathcal{S} = \emptyset}$.

5. **Résolution dans \mathbb{R} de $|x^2 - 1| \leq 2|x|$:**

On commence par faire un tableau récapitulatif des cas :

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$ x $	$-x$	\vdots	$-x$	0	x
$ x^2 - 1 $	$x^2 - 1$	0	$-x^2 + 1$	\vdots	$-x^2 + 1$
		0		0	
					$x^2 - 1$

Étude de cas :

- Cas 1 : si $x \in]-\infty, -1[$:

$$|x^2 - 1| \leq 2|x| \Leftrightarrow x^2 - 1 \leq -2x \Leftrightarrow x^2 + 2x - 1 \leq 0.$$

Ainsi $\mathcal{S}_1 = [-1 - \sqrt{2}, -1]$.

- Cas 2 : si $x \in]-1, 0[$:

$$|x^2 - 1| \leq 2|x| \Leftrightarrow -x^2 + 1 \leq -2x \Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 \geq 0.$$

Ainsi $\mathcal{S}_2 =]-1, 1 - \sqrt{2}]$.

- Cas 3 : si $x \in [0, 1[$:

$$|x^2 - 1| \leq 2|x| \Leftrightarrow -x^2 + 1 \leq 2x \Leftrightarrow x^2 + 2x - 1 \geq 0.$$

Ainsi $\mathcal{S}_3 = [-1 + \sqrt{2}, 1]$.

- Cas 4 : si $x \in]1, +\infty[$:

$$|x^2 - 1| \leq 2|x| \Leftrightarrow x^2 - 1 \leq 2x \Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 \leq 0.$$

Ainsi $\mathcal{S}_4 =]1, 1 + \sqrt{2}]$.

Synthèse : on obtient $\boxed{\mathcal{S} = [-1 - \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}] \cup [-1 + \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}]}$.

6. **Résolution dans \mathbb{R} de $||x| - 5| \geq ||3x| - 3|$:**

On commence toujours par se débarrasser des valeurs absolues à l'intérieur :

- Si $x \geq 0$: On a alors : (6) $\Leftrightarrow |x - 5| \geq |3x - 3|$. Ici soit on refait des cas sur les signes de $x - 5$ et $3x - 3$, soit on élève au carré car les valeurs absolues sont positives. On applique la deuxième méthode :

$$(6) \Leftrightarrow (x - 5)^2 \geq (3x - 3)^2 \Leftrightarrow -8x^2 + 8x + 16 \geq 0 \Leftrightarrow -x^2 + x + 2 \geq 0$$

On trouve alors $x \in [-1, 2]$. Attention, il faut aussi dans ce premier cas que x soit positif : au final, $\mathcal{S}_1 = [0, 2]$.

- Si $x < 0$: On a alors : (6) $\Leftrightarrow |-x - 5| \geq |-3x - 3|$. On élève au carré car les valeurs absolues sont positives :

$$(6) \Leftrightarrow (-x - 5)^2 \geq (-3x - 3)^2 \Leftrightarrow -8x^2 - 8x + 16 \geq 0 \Leftrightarrow -x^2 - x + 2 \geq 0$$

On trouve $x \in [-2, 1]$, mais comme on doit avoir $x < 0$ dans ce deuxième cas, on a $\mathcal{S}_2 = [-2, 0[$.

Conclusion : $\boxed{\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 = [-2, 2]}$.

7. Résolution dans \mathbb{R} de $\sqrt{x^2 - x - 2} \geq |3x + 2|$:

- Domaine de définition : L'inéquation est bien définie si $x^2 - x - 2 \geq 0$. Ainsi $\mathcal{D} =]-\infty, -1] \cup [2, +\infty[$.
- Tableau récapitulatif :

x	$-\infty$	$-\frac{2}{3}$	$+\infty$
$ 3x + 2 $	$-3x - 2$	0	$3x + 2$

- Étude de cas :

★ Cas 1 : si $x \in]-\infty, -\frac{2}{3}]$: on se place donc sur $]-\infty, -1]$:

On doit alors résoudre $\sqrt{x^2 - x - 2} \geq -3x - 2$. Les deux termes sont bien positifs donc on peut passer au carré tout en conservant l'équivalence. On obtient :

$$\sqrt{x^2 - x - 2} \geq |3x + 2| \Leftrightarrow x^2 - x - 2 \geq 9x^2 + 12x + 4 \Leftrightarrow 8x^2 + 13x + 6 \leq 0.$$

Le discriminant vaut $\Delta = -23 < 0$. Ainsi $\mathcal{S}_1 = \emptyset$.

★ Cas 2 : si $x \in]-\frac{2}{3}, +\infty[$: on se place donc sur $[2, +\infty[$:

On doit alors résoudre $\sqrt{x^2 - x - 2} \geq 3x + 2$. Les deux termes sont bien positifs donc on peut passer au carré tout en conservant l'équivalence. On obtient :

$$\sqrt{x^2 - x - 2} \geq |3x + 2| \Leftrightarrow x^2 - x - 2 \geq 9x^2 + 12x + 4 \Leftrightarrow 8x^2 + 13x + 6 \leq 0.$$

Le discriminant vaut $\Delta = -23 < 0$. Ainsi $\mathcal{S}_2 = \emptyset$.

Conclusion : $\boxed{\mathcal{S} = \emptyset}$.

8. Résolution dans \mathbb{R} de $\frac{x^2 + \sqrt{2}x}{|x^2 - 1| + 1} \geq 1$:

- Domaine de définition : L'inéquation est bien définie si $|x^2 - 1| + 1 \neq 0$. Ce qui est toujours le cas comme somme de deux termes positifs dont l'un est strictement positif. Ainsi $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
- Tableau récapitulatif :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$ x^2 - 1 $	$x^2 - 1$	0	$-x^2 + 1$	$x^2 - 1$

- Étude de cas :

★ Cas 1 : si $x \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$:

$$\frac{x^2 + \sqrt{2}x}{|x^2 - 1| + 1} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{x^2 + \sqrt{2}x}{x^2} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{x\sqrt{2}}{x^2} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0.$$

Ainsi $\mathcal{S}_1 = [1, +\infty[$.

★ Cas 2 : si $x \in]-1, 1[$:

$$\frac{x^2 + \sqrt{2}x}{|x^2 - 1| + 1} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{x^2 + \sqrt{2}x}{-x^2 + 2} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{2x^2 + x\sqrt{2} - 2}{2 - x^2} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0.$$

Un tableau de signe avec le signe du numérateur (les racines du numérateur étant $-\sqrt{2}$ et $\frac{1}{\sqrt{2}}$) et celui du dénominateur donne : $\mathcal{S}_2 = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1 \right[$.

Conclusion : $\mathcal{S} = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty \right[.$

II Partie entière

Correction 2. voir la correction video :<https://youtu.be/SdgHZih4gxA>

Correction 3.

Soit $x, y \in \mathbb{R}^2$ et $k = \lfloor x \rfloor$. On a donc $x \in [k, k + 1[$. Il y a maintenant deux cas possibles

Cas 1 : $y \in [k, k + 1[$ alors $\lfloor y \rfloor = k$ et donc $\lfloor x \rfloor = \lfloor y \rfloor \leq \lfloor y \rfloor$.

Cas 3 : $y \notin [k, k + 1[$ Comme $y \geq x$, on a $y > k + 1$ et comme $\lfloor y \rfloor > y - 1$ on a $\lfloor y \rfloor > k = \lfloor x \rfloor$
On a ainsi montré que la fonction était croissante.

Correction 4. Distinguons les cas selon la parité de $\lfloor x \rfloor$.

Cas 1 : $\lfloor x \rfloor$ est paire Dans ce cas, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\lfloor x \rfloor \in [2k, 2k + 1[$, où $\lfloor x \rfloor = 2k$. On a alors $\frac{x}{2} \in [k, k + \frac{1}{2}[$ donc $\lfloor \frac{x}{2} \rfloor = k$ et $\frac{x+1}{2} \in [k + \frac{1}{2}, k + 1[$, donc de nouveau $\lfloor \frac{x+1}{2} \rfloor = k$
On a bien l'égalité demandée.

Cas 2 : $\lfloor x \rfloor$ est impaire Dans ce cas, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\lfloor x \rfloor \in [2k + 1, 2k + 2[$, où $\lfloor x \rfloor = 2k + 1$.
On a alors $\frac{x}{2} \in [k + \frac{1}{2}, k + 1[$ donc $\lfloor \frac{x}{2} \rfloor = k$ et $\frac{x+1}{2} \in [k + 1, k + \frac{3}{2}[$, donc cette fois $\lfloor \frac{x+1}{2} \rfloor = k + 1$
On a bien l'égalité demandée.

III Racine carrée

Correction 5.

1. Valeurs de a pour que $R(a)$ soit bien défini :

Pour que $R(a)$ soit bien définie, il faut déjà que $a - 1 \geq 0$, c'est-à-dire que $a \geq 1$. On suppose donc que $a \geq 1$. Sous cette hypothèse, on a donc que $a + 2\sqrt{a - 1} > 0$ comme somme d'un terme strictement positif et d'un autre terme positif. Il reste à étudier $a - 2\sqrt{a - 1}$.

$$a - 2\sqrt{a - 1} \geq 0 \Leftrightarrow a \geq 2\sqrt{a - 1} \Leftrightarrow a^2 - 2a + 1 \geq 0.$$

On est passé au carré tout en conservant l'équivalence car les deux termes sont bien positifs. Le discriminant de la dernière inéquation est strictement négatif ($\Delta = -4$) et ainsi, on a $a^2 - 2a + 1 > 0$, d'où $a - 2\sqrt{a - 1} > 0$. Finalement, on obtient

$$\mathcal{D}_R = [1, +\infty[.$$

2. Simplifions $R(a)$:

On suppose donc que $a \geq 1$. Ainsi, $R(a)$ a bien un sens et on peut calculer $R(a)^2$. On obtient

$$R(a)^2 = 2a + 2\sqrt{a^2 - 4a + 4} = 2a + 2\sqrt{(a - 2)^2} = 2a + 2|a - 2|.$$

Ainsi, si $1 \leq a \leq 2$, on obtient

$$R(a)^2 = 2a + 2(-a + 2) = 4 \quad \text{donc} \quad R(a) = 2$$

car $R(a) = -2$ est impossible car $R(a)$ est un nombre positif comme somme de deux nombres positifs (somme de deux racines carrées). Et si $a \geq 2$, on obtient

$$R(a)^2 = 2a + 2(a - 2) = 4(a - 1) \quad \text{donc} \quad R(a) = 2\sqrt{a - 1}$$

car $R(a) = -2\sqrt{a - 1}$ est impossible car $R(a)$ est un nombre positif comme somme de deux nombres positifs (somme de deux racines carrées).

On a donc obtenu :

$$\forall a \geq 1, R(a) = \begin{cases} 2 & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ 2\sqrt{a - 1} & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$$

Correction 6. La fonction f est bien définie si et seulement si $x^2 - (m + 1)x + m \geq 0$. Le discriminant donne : $\Delta = (m + 1)^2 - 4m = (m - 1)^2$.

- Cas 1 : si $m = 1$: On obtient alors $\Delta = 0$ et ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $x^2 - (m + 1)x + m \geq 0$. Ainsi : $\mathcal{D}_{m=1} = \mathbb{R}$.
- Cas 2 : si $m \neq 1$: On obtient alors $\Delta > 0$ et les deux racines distinctes sont alors : $\frac{m + 1 + |m - 1|}{2}$ et $\frac{m + 1 - |m - 1|}{2}$. Afin de calculer la valeur absolue, on doit encore distinguer deux cas :
 - ★ Si $m > 1$: les deux racines sont alors 1 et m et on obtient ainsi : $\mathcal{D}_{m>1} =] - \infty, 1] \cup [m, +\infty[$.
 - ★ Si $m < 1$: les deux racines sont alors m et 1 et on obtient ainsi : $\mathcal{D}_{m<1} =] - \infty, m] \cup [1, +\infty[$.

IV Exponentielle et logarithme

Correction 7.

1. $f(x) = x \ln \sqrt{e^{\frac{x}{2}}} + \left(\sqrt{e^{2 \ln(2x-1)}} \right)^3$: La fonction f est bien définie si et seulement si $\sqrt{e^{\frac{x}{2}}} > 0$, $e^{\frac{x}{2}} \geq 0$, $2x - 1 > 0$ et $e^{2 \ln(2x-1)} \geq 0$. Comme toute exponentielle est strictement positive, la fonction f est bien définie si et seulement si $2x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$. Ainsi $\mathcal{D}_f =]\frac{1}{2}, +\infty[$.

Pour tout $x > \frac{1}{2}$, on a :

$$f(x) = x \ln \left(e^{\frac{x}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} + \left(e^{2 \ln(2x-1)} \right)^{\frac{3}{2}} = x \ln \left(e^{\frac{x}{4}} \right) + \left(e^{\ln((2x-1)^2)} \right)^{\frac{3}{2}} = x \times \frac{x}{4} + ((2x-1)^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{x^2}{4} + (2x-1)^3$$

2. $g(x) = e^{\sqrt{\ln x}} + e^{(\ln x)^2}$. La fonction g est bien définie si et seulement si $x > 0$ et $\ln x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$. Ainsi $\mathcal{D}_g = [1, +\infty[$.

On ne peut RIEN simplifier car $\sqrt{\ln x} = (\ln x)^{\frac{1}{2}} \neq \frac{1}{2} \ln(x) \dots$. De même, on a : $(\ln x)^2 \neq \ln(x^2) \dots$ et on ne peut rien faire avec $(\ln x)^2$.

Correction 8. Résolution d'équations et d'inéquations avec \ln , \exp et $x \mapsto a^x$.

1. Résolution dans \mathbb{R} de $\ln(x^2 - 4e^2) < 1 + \ln(3x)$:

★ Domaine de résolution : $\mathcal{D} =]2e, +\infty[$

- ★ On a : $\ln(x^2 - 4e^2) < 1 + \ln(3x) \Leftrightarrow x^2 - 3xe - 4e^2 < 0$. Un tableau de signe donne $\mathcal{S} =]2e, 4e[$.

2. Résolution dans \mathbb{R} de $\ln(1 + e^{-x}) < x$:

- ★ Domaine de résolution : $\mathcal{D} = \mathbb{R}$
- ★ $\ln(1 + e^{-x}) < x \Leftrightarrow 1 + e^{-x} < e^x \Leftrightarrow e^{2x} - e^x - 1 > 0$. On pose $X = e^x$ et on se ramène ainsi à la résolution d'une inéquation du second degré. On obtient $\mathcal{S} = \left] \ln\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right), +\infty \right[$.

3. Résolution dans \mathbb{R} de $|\ln x| < 1$:

- ★ Domaine de résolution : $\mathcal{D} = \mathbb{R}^{+\ast}$.
- ★ On distingue deux cas :
 - Si $x \geq 1$, alors $|\ln x| = \ln x$ et on doit résoudre $\ln x < 1 \Leftrightarrow x < e$, donc $\mathcal{S}_\infty = [1, e[$.
 - Si $0 < x < 1$, alors $|\ln x| = -\ln x$ et on doit résoudre $-\ln x < 1 \Leftrightarrow x > \frac{1}{e}$, donc $\mathcal{S}_2 = \left] \frac{1}{e}, 1 \right[$.

Ainsi, $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$, soit : $\mathcal{S} = \left] \frac{1}{e}, e \right[$.

4. Résolution dans \mathbb{R} de $\ln(2x + 4) - \ln(6 - x) = \ln(3x - 2) - \ln(x)$:

- ★ Domaine de résolution : $\mathcal{D} = \left] \frac{2}{3}, 6 \right[$.
- ★ En utilisant les propriétés du logarithme népérien, on a : $\ln[x(2x + 4)] = \ln[(3x - 2)(6 - x)]$. Ce qui est équivalent à $x(2x + 4) = (3x - 2)(6 - x)$ car la fonction exponentielle est strictement croissante sur \mathbb{R} . En passant tout du même côté et en développant, on obtient : $\mathcal{S} = \left\{ \frac{6}{5}, 2 \right\}$.

5. Résolution dans \mathbb{R} de $e^{3x} - 6e^{2x} + 8e^x > 0$:

- ★ Domaine de résolution : $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
- ★ On pose $X = e^x$ et on se ramène ainsi à résoudre $X^3 - 6X^2 + 8X > 0 \Leftrightarrow X(X - 2)(X - 4) > 0$. Un tableau de signe donne que c'est équivalent à : $0 < X < 2$ ou $X > 4$ ce qui est équivalent à : $e^x < 2$ ou $e^x > 4$ car une exponentielle est toujours strictement positive. La fonction logarithme népérien étant strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+\ast}$, on obtient $\mathcal{S} =]-\infty, \ln(2)[\cup]\ln(4), +\infty[$.

6. Résolution dans \mathbb{R} de $2^{2x+1} + 2^x = 1$:

- ★ Domaine de résolution : $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
- ★ On a : $2^{2x+1} + 2^x = 1 \Leftrightarrow 2 \times (2^x)^2 + 2^x - 1 = 0$. On pose $X = 2^x$, et on doit résoudre

$2X^2 + X - 1 = 0$. Le discriminant est 9 et les racines sont ainsi -1 et $\frac{1}{2}$. On obtient alors

$$2^{2x+1} + 2^x = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} e^{x \ln 2} = -1 \\ \text{ou} \\ e^{x \ln 2} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow e^{x \ln 2} = \frac{1}{2} \quad \text{car } e^{x \ln 2} > 0$$

$$\Leftrightarrow x \ln 2 = -\ln 2 \quad \text{car la fonction logarithme est strictement croissante}$$

$$\Leftrightarrow x = -1.$$

Ainsi, on obtient $\boxed{\mathcal{S} = \{-1\}}$.

7. Résolution dans \mathbb{R} de $e^{3x} - e^{2x} - e^{x+1} + e \leq 0$:

★ Domaine de résolution : $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

★ On pose $X = e^x$ et on doit alors résoudre $X^3 - X^2 - eX + e \leq 0$. On remarque que 1 est racine évidente et ainsi on peut factoriser par 1. Par identification des coefficients d'un polynôme, on obtient que : $X^3 - X^2 - eX + e \leq 0 \Leftrightarrow (X - 1)(X^2 - e) \leq 0$. Un tableau de signe donne $X \leq -\sqrt{e}$ ou $X \in [1, \sqrt{e}]$. On doit donc résoudre $e^x \leq -\sqrt{e}$ ou $e^x \in [1, \sqrt{e}]$. Or une exponentielle est toujours strictement positive donc on doit résoudre $e^x \in [1, \sqrt{e}]$. En composant par la fonction \ln qui est strictement croissante sur \mathbb{R}^{+*} , on obtient $x \in [0, \ln(\sqrt{e})] \Leftrightarrow x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$.

★ Conclusion : $\boxed{\mathcal{S} = \left[0, \frac{1}{2}\right]}$.

8. Résolution dans \mathbb{R} de $(\ln x)^2 - 3 \ln x - 4 \leq 0$:

★ Domaine de résolution : $\mathcal{D} = \mathbb{R}^{+*}$.

★ On pose $X = \ln(x)$ et on doit alors résoudre $X^2 - 3X - 4 \leq 0$. Le discriminant vaut $\Delta = 25$ et les racines sont -1 et 4 . Ainsi, un tableau de signe donne que : $X^2 - 3X - 4 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq X \leq 4$. On doit donc résoudre $-1 \leq \ln(x) \leq 4$. En composant par la fonction \exp qui est strictement croissante sur \mathbb{R} , on obtient que : $e^{-1} \leq x \leq e^4$.

★ Conclusion : $\boxed{\mathcal{S} = [e^{-1}, e^4]}$.

9. Résolution dans \mathbb{R} de $2e^{2x} - e^x - 1 \leq 0$:

★ Domaine de résolution : $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

★ On pose $X = e^x$ et on doit résoudre $2X^2 - X - 1 \leq 0$. On obtient $X \in \left]-\frac{1}{2}, 1\right[$, soit $e^x > -\frac{1}{2}$ et $e^x < 1$. La première équation est toujours vraie, et la deuxième équivaut à $x < 0$. On a donc : $\boxed{\mathcal{S} =]-\infty, 0]}$.

10. Résolution dans \mathbb{R} de $2 \ln(x) + \ln(2x - 1) > \ln(2x + 8) + 2 \ln(x - 1)$:

★ Domaine de résolution : $\mathcal{D} =]1, +\infty[$.

- ★ En utilisant les propriétés du logarithme népérien et le fait que la fonction exponentielle est strictement croissante sur \mathbb{R} , on doit résoudre $5x^2 - 14x + 8 < 0$. En n'oubliant pas le domaine de définition, on obtient $\mathcal{S} =]1, 2[$.

11. Résolution dans \mathbb{R} de $4e^x - 3e^{\frac{x}{2}} \geq 0$:

- ★ Domaine de résolution : $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
- ★ On pose $X = e^{\frac{x}{2}}$ et cela revient à résoudre $4X^2 - 3X \geq 0 \Leftrightarrow X(4X - 3) \geq 0$. Ce qui est équivalent à $e^{\frac{x}{2}} \leq 0$ ou $e^{\frac{x}{2}} \geq \frac{3}{4}$. La première inéquation est impossible et la deuxième donne

$$\mathcal{S} = \left[2 \ln \left(\frac{3}{4} \right), +\infty \right[.$$

12. Résolution dans \mathbb{R} de $e^x - e^{-x} = 3$:

- ★ Domaine de résolution : $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
- ★ On met tout sur le même dénominateur et on obtient : $\frac{e^{2x} - 3e^x - 1}{e^x} = 0$. On pose $X = e^x$ et

on doit donc résoudre $X^2 - 3X - 1 = 0$. En repassant à x , on obtient $\mathcal{S} = \left\{ \ln \left(\frac{3 + \sqrt{13}}{2} \right) \right\}$.

13. Résolution dans \mathbb{R} de $9^x - 2 \times 3^x - 8 > 0$:

- ★ Domaine de résolution : $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
- ★ On peut remarquer que : $9^x = (3^x)^2$. Ainsi on pose $X = 3^x$ et on obtient que : $X^2 - 2X - 8 > 0$. Le discriminant vaut $\Delta = 36$ et les racines sont -2 et 4 . Ainsi on doit résoudre $3^x < -2$ ou $3^x > 4$. Or on sait que $3^x = e^{x \ln 3}$ ainsi la première inéquation est impossible et la deuxième inéquation donne : $3^x > 4 \Leftrightarrow x > \frac{\ln 4}{\ln 3}$ en composant par la fonction \ln qui est

strictement croissante sur \mathbb{R}^{++} et car $\ln 3 > 0$. On a donc : $\mathcal{S} = \left] \frac{\ln 4}{\ln 3}, +\infty \right[$.

Correction 9. Utilisation d'une étude de fonction.

1. Montrons que $\forall x > 0, x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$:

On démontre l'inégalité en deux temps.

- Montrons d'abord que pour tout $x > 0 : x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x)$:

On pose pour cela la fonction $f(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$. Cette fonction est bien définie sur \mathbb{R}^+ et elle est dérivable sur \mathbb{R}^+ comme composée et somme de fonctions dérivables. On obtient pour tout $x \geq 0 : f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{x^2}{1+x}$. Comme on est sur \mathbb{R}^+ , on a : $f'(x) \geq 0$. On obtient donc les variations suivantes en utilisant le fait que $f(0) = 0$:

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	0	

Ainsi 0 est le minimum de f sur \mathbb{R}^+ et on obtient bien que pour tout $x > 0$: $\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} \geq 0$, à savoir $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x)$.

- On montre de même la deuxième inégalité en étudiant la fonction $g(x) = \ln(1+x) - x$.

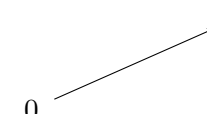
2. **Montrons que** $\forall x \in \mathbb{R}^+, e^x - \frac{x^2}{2} \geq 1$:

Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on pose $f(x) = e^x - \frac{x^2}{2} - 1$. La fonction f est définie et dérivable sur \mathbb{R} comme somme de fonctions définies et dérivables. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = e^x - x.$$

Or on a montré dans le cours (il faudrait refaire le raisonnement) que l'on a $e^x \geq x + 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc on a $f'(x) \geq 0$ sur \mathbb{R}^+ . On obtient alors le tableau de variation suivant

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	0	$+\infty$



Justifions les limites aux bornes : on a : $f(0) = e^0 - 0 - 1 = 0$. L'étude en $+\infty$ fait apparaître une forme indéterminée. Pour lever l'indétermination, on met en facteur le terme dominant à savoir e^x et on obtient ainsi : $f(x) = e^x \left(1 - \frac{x^2}{2e^x} - \frac{1}{e^x} \right)$. Par croissance comparée, on sait que

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{2e^x} = 0$. Ainsi par quotient, somme et produit de limite, on obtient que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Ainsi, 0 est le minimum de f atteint en $x = 0$ et donc la fonction f est toujours positive ou nulle.

Ainsi, on a bien

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq \frac{x^2}{2} + 1.$$