

TD 2 - Fonctions usuelles réelles

I Valeur absolue

Exercice 1. Résolution d'équations et d'inéquations avec des valeurs absolues :

1. $|2 + x| + 2 + 2x = x^2$

2. $x^2 = |x|$

3. $|2x - 3| \leq 2$

4. $|2x + 3| - |-5x + 6| \geq 3x + 2$

5. $|x^2 - 1| \leq 2|x|$

6. $||x| - 5| \geq ||3x| - 3|$

7. $\sqrt{x^2 - x - 2} \geq |3x + 2|$

8. $\frac{x^2 + \sqrt{2}x}{|x^2 - 1| + 1} \geq 1$

II Partie entière

Exercice 2. On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x - [x]}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .

2. Montrer que f est périodique de période 1.

3. Donner une expression simplifiée de f sur les intervalles de la forme $]k, k + 1[$, $k \in \mathbb{N}$.

4. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que x est rationnel si et seulement si $f(x)$ est rationnel.

Exercice 3. Montrer que la fonction partie entière est croissante, ie montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}^2$, :

$$x \leq y \implies [x] \leq [y].$$

Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}^2$, :

$$[x] + [y] \leq [x + y] \leq [x] + [y] + 1.$$

Exercice 4. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$[x] = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x + 1}{2} \right\rfloor.$$

III Racine carrée

Exercice 5. On considère l'expression $R(a) = \sqrt{a + 2\sqrt{a - 1}} + \sqrt{a - 2\sqrt{a - 1}}$.

1. Pour quels valeurs de a , $R(a)$ est-elle bien définie ?

2. Pour ces valeurs, simplifier l'expression $R(a)$. Tracer la fonction $a \mapsto R(a)$.

Exercice 6. Déterminer en fonction du paramètre $m \in \mathbb{R}$ l'ensemble de définition de la fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} donnée par

$$f(x) = \sqrt{x^2 - (m + 1)x + m}.$$

IV Exponentielle et logarithme

Exercice 7. Résolution d'équations et d'inéquations avec les fonctions \ln , \exp et $x \mapsto a^x$:

1. $\ln(x^2 - 4e^2) < 1 + \ln(3x)$
2. $\ln(1 + e^{-x}) < x$
3. $|\ln x| < 1$
4. $\ln(2x + 4) - \ln(6 - x) = \ln(3x - 2) - \ln(x)$
5. $e^{3x} - 6e^{2x} + 8e^x > 0$
6. $2^{2x+1} + 2^x = 1$
7. $e^{3x} - e^{2x} - e^{x+1} + e \leq 0$.
8. $(\ln x)^2 - 3 \ln x - 4 \leq 0$
9. $2e^{2x} - e^x - 1 \leq 0$
10. $2 \ln(x) + \ln(2x - 1) > \ln(2x + 8) + 2 \ln(x - 1)$
11. $4e^x - 3e^{\frac{x}{2}} \geq 0$
12. $e^x - e^{-x} = 3$
13. $9^x - 2 \times 3^x - 8 > 0$

Exercice 8. À l'aide d'une étude de fonction, démontrer les inégalités suivantes :

1. $\forall x > 0, x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1 + x) \leq x$
2. $\forall x \in \mathbb{R}^+ : e^x - \frac{x^2}{2} \geq 1$.

Exercice 9. Pour chacune des expressions, donner le domaine de définition et simplifier quand c'est possible.

1. $f(x) = x \ln \sqrt{e^{\frac{x}{2}}} + \left(\sqrt{e^{2 \ln(2x-1)}} \right)^3$.
2. $g(x) = e^{\sqrt{\ln x}} + e^{(\ln x)^2}$.