TD 3 - Sommes, produits et récurrences

I Factorielles

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N},\ n \geq 3$. Simplifier les nombres suivants :

$$A = \frac{7!}{6!}, \quad B = \frac{3 \times 4!}{(3!)^2}, \quad C = \frac{n!}{(n-1)!}, \quad D = \frac{(n+1)!}{(n-3)!} \text{ et } E = \frac{(n+1)!}{(n-2)!} + \frac{n!}{(n-1)!}.$$

II Calculs de sommes

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer les expressions suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^{2k}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^{2k+1}$
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a^k 2^{3k} x^{-k}$ avec $x \neq 0$
3. $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} (i^2 + n + 3)$
4. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (2i-1)^3$
5. $\displaystyle\sum_{k=2}^{n^2} (1-a^2)^{2k+1}$
6. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (3 \times 2^k + 1)$
7. $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \exp\left(\frac{k}{n}\right)$
8. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (2k - 1 + 2^k)$
9. $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^j$ et $\displaystyle\sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j} a^j$
10. $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^i$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \binom{n+1}{i} (-1)^i$
11. $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \frac{(-1)^{j-1}}{2^{j+1}}$
12. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{3^k} \binom{n}{k}$

Exercice 3. Coefficients binomiaux
Calculer les sommes suivantes :

1. $S_1 = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} j \binom{n}{j}$
2. $T = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}$, puis $S_2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k}$ (on pourra écrire que $k^2 = k(k-1) + k$).
3. $S_3 = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i+1}\binom{n}{i}$.

Exercice 4. Sommes télescopiques

1. Soit $x_0, x_1, \dots, x_n$ des nombres réels avec $n \in \mathbb{N}$. Calculer : $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}(x_{i+1}-x_i)$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_{i+1}-x_{i-1})$.

2. Calculer : $\displaystyle\sum_{k=3}^{n} \ln\left[\frac{k^2}{(k+1)(k-2)}\right]$

Exercice 5. Sommes télescopiques

1. Déterminer $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\forall k \in \mathbb{N}^\star$, $\dfrac{1}{(k+1)(k+2)} = \dfrac{a}{k+1} + \dfrac{b}{k+2}$. En déduire : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)}$.

2. Déterminer trois réels a, b et c tels que : $\forall k \in \mathbb{N}^\star$, $\dfrac{k-1}{k(k+1)(k+3)} = \dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k+1} + \dfrac{c}{k+3}$. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{k(k+1)(k+3)}$.

3. Déterminer trois réels a, b et c tels que : $\forall k \in \mathbb{N}^\star$, $\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)} = \dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k+1} + \dfrac{c}{k+2}$. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

   Retrouver ce résultat par récurrence : montrer que $\forall n \geq 1$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$.

Exercice 6. Sommes et dérivation : Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$.

1. On pose, pour tout x dans $\mathbb{R}$, $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$. Calculer $f(x)$.

2. En déduire, pour tout x dans $\mathbb{R}$, la valeur de $g(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} x^{k-1}$, puis en déduire S.

Exercice 7. Sommes et dérivation : Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, on pose $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k$.

1. Calculer $f(x)$.

2. En dérivant, calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$, et en déduire $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kx^k$.

3. Calculer de la même façon : $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} k(k-1)x^{k-2}$.

Exercice 8. Sommes d'indices pairs et impairs

Soit n un entier naturel non nul. On définit les sommes suivantes : $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k}$ et $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1}$.

1. Montrer que $S_n + T_n = 2^{2n}$ et $S_n - T_n = 0$.
2. En déduire une expression de S_n et de T_n en fonction de n.

III Calculs de produits

Exercice 9. Soit $(n, p, i) \in \mathbb{N}^2$ non nuls. Calculer les produits suivants :

1. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} k$ et $\displaystyle\prod_{k=i}^{i+n} k$
2. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \exp\left(\frac{k}{n}\right)$
3. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1}$
4. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} (4k-2)$
5. $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$
6. $\displaystyle\prod_{k=0}^{p-1} \frac{n-k}{p-k}$. On exprimera le résultat à l'aide de factorielles.

Exercice 10. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k}{2}\right)$.

IV Calculs de sommes doubles

Exercice 11. Dans cet exercice, n, m et p sont deux entiers naturels non nuls et x un nombre complexe. Calculer les sommes doubles suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} \sum_{q=0}^{m} p(q^2+1)$
2. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} 1$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} 1$
3. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} i2^j$
4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sum_{l=k}^{n} \frac{k}{l+1}$
5. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} x^j$
6. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n^2} \sum_{i=k}^{k+2} ki^2$
7. $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=0}^{j} \frac{x^i}{x^j}$
8. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} \binom{j}{i}$