Interro 1

Exercice 1. Ecrire sous forme d'intervalle les ensembles suivants :

$$E_1 = \{x \,|\, 2x^2 + 1 \leq 5\}$$

$$E_2 = \{x^2 + 2x \,|\, x < 1\}$$

Puis dire si ces ensembles sont minorés, majorés, bornés. Le cas échéant en donner la borne supérieure et/ou inférieure.

Correction 1. Pour décrire E_1 il suffit de résoudre $2x^2 + 1 \leq 5$. On obtient

$$x^2 \leq 2$$

Ainsi

$$\boxed{E_1 = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]}$$

C'est un ensemble minoré et majoré, donc bornée.

$$\boxed{\inf E_1 = -\sqrt{2} \text{ et } \sup E_1 = \sqrt{2}}$$

Pour décrire E_2 il faut étudier la fonction $f(x) = x^2 + 2x$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $f'(x) = 2x + 2$. On obtient donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-1		1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3

Ainsi

$$\boxed{E_2 = [-1, +\infty[}$$

E_2 est donc minoré mais pas majoré (donc pas borné)

$$\boxed{\inf E_2 = -1}$$

Exercice 2. Résoudre

$$\sqrt{x+6} = x$$

Appelons l'équation $\sqrt{x+6} = x$, (E). (E) est définie sur $D_E = [-6, +\infty[$. Etudions le signe du membre de droite afin de passer au carré.

Si $x \geq 0$

Alors

$$(E) \iff (\sqrt{x+6})^2 = x^2$$

Et on obtient

$$(E) \iff x^2 - x - 6 = 0$$

Les racines de $x^2 - x - 6$ de sont -2 et 3. Comme

$$-2 < 0$$

On obtient comme solution sur $[0, +\infty[$

$$S_+ = \{3\}$$

Si $x < 0$

Comme $\sqrt{x+6} \geq 0$, il n'y a pas de solution sur $[-6, 0[$. L'ensemble des solutions sur $[-6, 0[$ est

$$S_- = \emptyset$$

L'ensemble des solutions de (E) est

$$\boxed{\mathcal{S} = S_+ \cup S_- = \{3\}}$$