TD 5 - Trigonométrie

I Résolution d'équations trigonométriques

Exercice 1. Calculer les réels suivants : $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$, $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$, $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

Exercice 2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations suivantes et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique :

1. $\cos(5x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
2. $\sin(4x) = -\frac{1}{2}$
3. $\tan\left(\frac{x}{2}\right) = -1$
4. $\tan(2x) = -\sqrt{3}$

Exercice 3. Résoudre dans $\mathbb{R}$, puis dans $[0, 2\pi[$ et enfin dans $]-\pi, \pi]$ les équations suivantes :

1. $\sin x - \cos x = \frac{\sqrt{6}}{2}$
2. $-\sqrt{3}\sin x + \cos x = \sqrt{2}$
3. $\sin x + \frac{1}{\sqrt{3}}\cos x = 0$
4. $\cos(2x) + \sqrt{3}\sin(2x) = \sqrt{2}$

Exercice 4. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations suivantes et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique :

1. $\tan^2 x + (1-\sqrt{3})\tan x - \sqrt{3} = 0$
2. $\sqrt{2}\sin^2 x + (\sqrt{2}-1)\cos x + 1 - \sqrt{2} = 0$
3. $2\sin^4(x) - \sin^3(x) - 2\sin^2(x) + \sin(x) = 0$

Exercice 5. Résoudre dans $\mathbb{R}$, puis dans $[0, 2\pi[$ les équations suivantes :

1. $\cos(3x-2) = \cos(2x-1)$
2. $\sin(3x - \frac{\pi}{3}) = \sin(2x + \frac{\pi}{6})$
3. $\tan(x+1) + \tan(3x+1) = 0$
4. $\sin^2 x = \frac{1}{2}$
5. $\sin(2x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$
6. $2\cos^2(3x) + 3\cos(3x) + 1 = 0$
7. $2\sin^2 x = \sqrt{3}\sin(2x)$
8. $\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$
9. $\sqrt{3}\cos^2 x + 2\cos x\sin x - \sqrt{3}\sin^2 x = \sqrt{2}$
10. $1 + \cos x + \sin(5x) + \sin(6x) = 0$
11. $\tan^4(x) + 2\tan^2(x) - 3 = 0$

Exercice 6. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique :

1. $\sin^4 x + \cos^4 x = 1$
2. $\sin\theta + \sin(2\theta) + \sin(3\theta) + \sin(4\theta) = 0$
3. $\cos\theta - \cos(2\theta) = \sin(3\theta)$
4. $\cos^3(x)\sin(3x) + \sin^3(x)\cos(3x) = \frac{3}{4}$ *(exprimer $\sin(3x)$ et $\cos(3x)$ en fonction de $\sin x$ et $\cos x$)*

Exercice 7.

1. Soit $x \in \mathbb{R}\setminus\{\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. On pose : $u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$. Établir les relations suivantes, et indiquer pour quelles valeurs de x elles sont valides :
   (a) $\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$ (b) $\sin x = \frac{2u}{1+u^2}$ (c) $\tan x = \frac{2u}{1-u^2}$

2. En utilisant ces relations, résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation : $\cos x - 3\sin x + 2\tan\left(\frac{x}{2}\right) - 1 = 0$.

II Résolution d'inéquations trigonométriques

Exercice 8. Résoudre les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$, puis dans $[0, 2\pi[$ et $]-\pi, \pi]$:

1. $2\sin x - 1 < 0$
2. $2\cos(2x) > \sqrt{3}$
3. $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\tan(3x) > 1$
4. $\sin(3x) \geq -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
5. $\sqrt{2}\cos(3x) \leq 1$
6. $\tan(x) \leq 1$

Exercice 9. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes et représenter l'ensemble des solutions sur le cercle trigonométrique :

1. $4\sin^2 x - (2 + 2\sqrt{3})\sin x + \sqrt{3} \leq 0$
2. $\tan^2 x - 1 < 0$
3. $2\cos^2(3x) - 3\cos(3x) + 1 \leq 0$
4. $\tan^2 x - (\sqrt{3} - 1)\tan x - \sqrt{3} < 0$
5. $\dfrac{1}{4} \leq \sin^2 x \leq \dfrac{1}{2}$
6. $\cos(x) - \sin(x) \geq \dfrac{\sqrt{6}}{2}$
7. $\sin(x) - \dfrac{1}{\sqrt{3}}\cos(x) \leq -1$
8. $\cos x + \sin x - 1 < 0$
9. $\sqrt{3}\cos x + \sin x - \sqrt{2} < 0$

Exercice 10. Résoudre les inéquations suivantes dans $[0, 2\pi[$ et dans $]-\pi, \pi]$:

1. $\cos(2x) - \cos(4x) < 0$
2. $2\sin x \tan x - 3 < 0$
3. $\cos(3x) \leq -\sin\left(3x + \dfrac{\pi}{4}\right)$
4. $\cos x + \cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) > 0$
5. $2\cos x - \sin x > \sin(3x)$
6. $4\cos^2 x + 2(\sqrt{3} - 1)\sin x + \sqrt{3} - 4 > 0$

III Étude de fonctions trigonométriques

Exercice 11. **(Fonctions trigonométriques)** Soit f une fonction définie par $f(x) = \ln|\cos(x)\sin(x)|$.

1. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f.
2. Montrer que f est π périodique, paire et que : $\forall x \in \mathcal{D}_f,\ f\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = f(x)$. A quel intervalle peut-on réduire l'étude de la fonction f ?
3. Montrer soigneusement que f est dérivable sur $\left]0, \dfrac{\pi}{4}\right]$ et calculer sa dérivée. Dresser le tableau de variation de f sur cet intervalle.
4. Tracer la courbe de f en justifiant sa construction.

Exercice 12. **(Fonctions trigonométriques)** Soit la fonction f définie par : $f(x) = 3\cos x - \cos(3x)$.

1. Étudier la parité et la périodicité de f.
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
3. Étudier les variations de f sur $[0, \pi]$.
4. Déterminer l'équation de la tangente au graphe de f en $x = \pi/2$. Déterminer les abscisses pour lesquelles la tangente est horizontale.
5. Représenter f sur l'intervalle $\left[\dfrac{-3\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right]$

Exercice 13. Étudier la fonction $f : x \mapsto\ 3\sin x - \sin(3x)$ (Étude du domaine de définition, de la périodicité, de la parité, restriction du domaine d'étude, variation, courbe).