DS2

3h00

- Les calculatrices sont interdites durant les cours, TD et *a fortiori* durant les DS de mathématiques.
- Si vous pensez avoir découvert une erreur, indiquez-le clairement sur la copie et justifiez les initiatives que vous êtes amené·e ·s à prendre.
- Une grande attention sera apportée à la clarté de la rédaction et à la présentations des solutions. (Inscrivez clairement en titre le numéro de l'exercice, vous pouvez aussi encadrer les réponses finales.)
- Vérifiez vos résultats.
- Le résultat d'une question peut être admis et utilisé pour traiter les questions suivantes en le signalant explicitement sur la copie.

Exercice 1. On considére l'inéquation :

$$(I) : \frac{2\sin(x) - \sqrt{2}}{\sin(x)(2\cos(x) - 1)} > 0$$

1. Déterminer D : l'ensemble de définition de (I).
2. Résoudre (I) sur $[0, 2\pi[\cap D$. On pourra faire un tableau de signes.

Exercice 2. On définit deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ par

$$u_0 = 3 \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{2u_n}{u_n + 1} \quad v_n = \frac{2u_n - 1}{-u_n + 1}$$

1. INFO Ecrire une fonction Python qui prend en argument un entier n et retourne la valeur de u_n.
2. Résoudre $\dfrac{2x}{x+1} > 1$
3. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$ et en déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bien définies.
4. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$v_{n+1} = 2v_n + 1$$
5. Donner l'expression de v_n en fonction de n.
6. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

Exercice 3. On définit deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ par

$$u_0 = 3 \quad v_0 = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 3u_n + v_n \quad \text{et} \quad v_{n+1} = 2u_n + 3v_n.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$u_{n+2} = 6u_{n+1} - 7u_n$$
2. En déduire la valeur de u_n en fonction de n.

Exercice 4. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $0 < a < b$. On pose $u_0 = a, v_0 = b$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}, \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

1. INFO Ecrire une fonction Python qui prend en argument un entier n et deux flottants $(a, b) etretournelavaleur$
2. Montrer que pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2$ on a
$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$$
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq v_n$.
4. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et décroissante.
5. Montrer que pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2$ tel que $x \geq y > 0$ on a
$$\frac{x+y}{2} - \sqrt{xy} \leq \frac{1}{2}(x - y)$$
6. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n - u_n \leq \frac{1}{2^n}(v_0 - u_0)$.

7. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite.
8. INFO On note ℓ la limite commune des deux suites. Ecrire une fonction Python qui prend en argument un flottant `eps` et retourne la valeur de ℓ à `eps` prés.

Problème 1. On se propose dans ce problème de calculer la limite de la suite :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+n}$$

1. INFO Ecrire une fonction Python qui prend en argument un entier n et retourne la valeur de S_n.
2. Etude de la convergence de $(S_n)_{n\geq 1}$.
   (a) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n \geq 0$.
   (b) Montrer que $(S_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.
   (c) En déduire que $(S_n)_{n\geq 1}$ converge. On note ℓ sa limite.
3. Minoration de la limite
   (a) A l'aide d'un changement de variable montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$$
   (b) Montrer à l'aide d'une somme téléscopique -dont on détaillera les étapes de calculs- que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
   $$\sum_{k=n}^{2n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \ln\left(\frac{2n+1}{n}\right)$$
   (c) En déduire la limite de $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$.
   (d) A l'aide d'une étude fonction montrer que pour tout $x \geq 0$:
   $$\ln(1+x) \leq x.$$
   (e) Montrer à l'aide des questions précédentes que
   $$\ln(2) \leq \ell.$$

LA QUESTION 4 N EST PAS A TRAITER EN DS. C EST LE DM DE LA SEMAINE PROCHAINE !

4. Majoration de la limite.
   (a) A l'aide d'une étude de fonction, montrer que pour tout $x \geq 0$:
   $$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x)$$
   (b) On pose $e_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{2k^2}$. On va montrer que $(e_n)_{n\geq 1}$ tend vers 0.
      i. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $e_n \geq 0$.
      ii. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $e_n \leq \frac{n+1}{2n^2}$.
      iii. Conclure.
   (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
   $$S_n \leq e_n + \sum_{k=n}^{2n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$$
   (d) En déduire la valeur de ℓ.