Programme de colle : Semaine 4
Lundi 9 octobre

I Cours

1. Suites réelles usuelles
   (a) Suites arithmétiques, géométriques.
   (b) Suites arithmético-géométriques (AG) : savoir donner une forme close d'une suite AG.
   (c) Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 (SRL_2) : savoir donner une forme close d'une suite SRL_2 quand le discriminant est positif ou nul (⚠ les complexes n'ont pas encore été vus !)
   (d) Limites
      i. Théorème d'encadrement (dit théorème des « gendarmes »)
      ii. Théorème de comparaison des limites (si $u_n \leq v_n$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers ℓ, ℓ' alors $\ell \leq \ell'$)
      iii. Théorème de convergence des suites monotones.
      iv. Suites adjacentes (definition et théorème de convergence)
2. Trigométrie.
   (a) Connaître les valeurs remarquables de $\cos, \sin, \tan$
   (b) Les formules suivantes sont à connaître :
   $$\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$$
   $$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$
   $$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$$
   et pouvoir déduire :
   $$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a)$$
   (c) Connaître la définition de $\arccos, \arcsin, \arctan$. (aucune étude analytique de ces fonctions n'a été vue). En connaître les valeurs remarquables.
   (d) Savoir résoudre des équations et inéquations trigonométriques.

II Exercices Types

1. Donner l'expression close de u_n définie par
$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = 2u_n + 1$$
2. Donner l'expression close de u_n définie par
$$u_0 = 1, u_1 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$$
3. On note $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.
   (a) Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.
   (b) Montrer que pour tout $k \geq 2$
   $$\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

(c) En déduire que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $\ell \in [0, 2]$.

4. Étudier la convergence de

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n(n!)}$$

5. Donner la valeur de $\cos(\frac{\pi}{12})$
6. Résoudre sur $\mathbb{R}$ puis sur $[0, 2\pi[$,

$$\cos(3x) = 1$$
$$\sin(3x) = \cos(2x + \frac{\pi}{3})$$
$$\sqrt{3}\cos(x) - \sin(x) = \sqrt{2}$$
$$2\cos^2(x) + 3\cos(x) + 1 = 0$$

7. Résoudre sur $\mathbb{R}$ puis sur $[0, 2\pi[$,

$$\cos(3x) > 1$$
$$\sin(3x) \geq \cos(2x + \frac{\pi}{3})$$
$$\sqrt{3}\cos(x) - \sin(x) < \sqrt{2}$$
$$2\cos^2(x) + 3\cos(x) + 1 \leq 0$$