Chapitre 10 : Equations differentielles

Une équation différentielle est une équation dont la variable est une fonction f, et qui met en jeu f et ses dérivées. Les équations différentielles interviennent dans de nombreux domaines physiques et biologiques pour étudier des phénomènes qui évoluent dans le temps, comme par exemple des réactions chimiques ou la croissance d'une population.

Exemple 1. En dynamique des populations, le modèle de Malthus décrit l'évolution d'une population placée dans des conditions idéales (nourriture et place illimitée) grâce à une équation différentielle. Le nombre d'individus au temps t est noté $N(t)$, et la fonction N obéit à l'équation différentielle

$$N'(t) = \lambda N(t),$$

ce qui signifie que la croissance de la population est proportionnelle au nombre d'individus.

Les équations différentielles sont omniprésentes en sciences. Dès qu'il s'agit d'étudier les variations au cours du temps d'une quantité, que ce soit en physique, en chimie, en biologie ou même en économie, on est amené à modéliser le phénomène à l'aide d'équations différentielles. Vous en avez déjà (ou vous allez en) rencontrées en électricité, en mécanique, en cinétique...

I Équations différentielles linéaires du premier ordre

Dans toute cette section, on considère I un intervalle de $\mathbb{R}$, et deux fonctions $a, b : I \to \mathbb{R}$ continues sur I.

I. 1 Définitions et notations

Définition 1. Équations différentielles linéaires du premier ordre :

- On appelle équation différentielle linéaire du premier ordre sous forme résoluble toute équation de la

  forme : y'(t)+a(t)y(t)=b(t) (1)

- Lorsque b est la fonction nulle, on dit que c'est une équation homogéne.

  On appelle équation homogène associée à (1) l'équation : y'(t)+a(t)y(t)=0

- Une équation différentielle linéaire est dite à coefficients constants lorsque les fonctions a et b sont constantes.

Définition 2. Solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre :
On appelle solution de l'équation différentielle linéaire (1) toute fonction :

- f dérivable sur $\mathbb{R}$
- Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f'(t) + a(t)f(t) = b(t)$

Exercice 3. Résolution de $y' + 2y = 0$.

I. 2 Résolution de l'équation linéaire homogène associée

I. 2. a Primitives des fonctions usuelles

Définition 4. Soit f une fonction continue sur un intervalle I. On appelle primitive de f, toute fonction F, dérivable sur I et telle que pour tout $x \in I$:

$$F'(x) = f(x)$$

Remarques :

- Une primitive d'une fonction n'est pas unique : si F est une primitive de f sur I alors $G = F + a$ pour tout réel a est aussi une primitive. On utilisera donc l'article indéfini 'une' quand on parlera de primitive et non de l'article défini 'la'.

Théorème 5. Soit f une fonction continue sur un intervalle I, alors f admet une primitive sur I.

Primitives de fonctions composées.

I. 2. b Forme des solutions d'une équation différentielle homogéne du premier ordre

Théorème 6. Soit $a : I \to \mathbb{R}$ continue sur I intervalle de $\mathbb{R}$ et soit A une primitive de a sur I.
Les solutions de l'équation différentielle homogène associée (2) : $y' + a(x)y = 0$ sont les fonctions :

$$S_h = \{t \mapsto Ce^{-A(t)} \,|\, C \in \mathbb{R}\}$$

où A est une primitive de a

Démonstration. □

Exercice 7. 1. Résolution de $x' + tx = 0$.

2. Résolution de $y' - \dfrac{xy}{x^2-1} = 0$.
3. Résolution de $y' - \dfrac{3y}{2x} = 0$.

I. 3 Recherche d'une solution particulière de l'équation avec second membre

Méthode de la variation de la constante

On a vu que les solutions de l'équation homogène (2) : $y' + a(x)y = 0$ sont $y : x \mapsto Ce^{-A(x)}$ avec A une primitive de a et C une constante réelle. Le principe de la méthode de variation de la constante est alors de rechercher une solution particulière de l'équation avec second membre (1) : $y' + a(x)y = b(x)$ sous la forme : $y : x \mapsto C(x)e^{-A(x)}$ avec C une fonction dérivable à déterminer qui correspond à la nouvelle inconnue. Le nom de la méthode s'explique puisque l'on remplace la constante C des solutions de l'équation homogène par une fonction qui varie $x \mapsto C(x)$.

Proposition 8. Soient deux fonctions a et b continues sur I intervalle de $\mathbb{R}$ et A une primitive de a. L'équation différentielle (1) : $y' + a(x)y = b(x)$ admet une solution particulière de la forme

$$\forall x \in I, \quad y_p(x) = C(x)e^{-A(x)}$$

avec C une fonction dérivable qui s'obtient par un calcul de primitive.

Méthode de la variation de la constante

- Chercher une solution particulière de (1) sous la forme $y_p(x) = C(x)e^{-A(x)}$
- Exprimer l'équation $y_p'(x) + a(x)y_p(x) = b(x)$ en fonction de $C'(x)$.
  Il y a forcément une simplification des $C(x)$ sinon c'est qu'il y a une erreur de calcul !
- Obtenir $C(x)$ au moyen d'un calcul de primitive.

Exercice 9. 1. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $x' + x = te^{-t}$.

2. Résoudre sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$: $y' - y\tan(x) = \sin(2x)$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $y' + y = \dfrac{1}{1+e^t}$.
4. Résolution de $y' - (\tan x)y = e^x$
5. Résolution de $x^2y' + y = \dfrac{1}{x}$
6. Résolution de $xy' - y + \ln(x) = 0$
7. Résolution de $(1-x^2)y' + 2xy = 4x$

Étude de quelques cas particuliers de second membre

❶ Principe de superposition

Proposition 10. Soient $a, b_1, b_2 : I \to \mathbb{R}$ des fonctions continues sur I et soient $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$. Si y_1 et y_2 sont respectivement des solutions de

$$y' + a(x)y = b_1(x) \qquad \text{et} \qquad y' + a(x)y = b_2(x)$$

alors :

$\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ est solution de

$$y' + a(x)y = \lambda_1 b_1(x) + \lambda_2 b_2(x)$$

Exercice 11. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $y' - 3y = e^{3x} + 6$.

❷ Cas où a est constante et le second membre polynomial ou exponentiel :

Lorsque a est constante et que le second membre $b(x)$ est de type polynomial et/ou exponentiel, la méthode de variation de la constante est alors peu efficace car elle conduit à intégrer des fonctions de type exponentielle$\times$ polynôme d'où des intégrations par parties successives. Or, dans de tels cas particuliers, la recherche d'une solution particulière est simple et rapide en appliquant les méthodes suivantes :

Expression de $b(x)$ et condition éventuelle	**Forme de la solution particulière $y_p(x)$**
Polynôme de degré n	Polynôme de degré n à déterminer
$P(x)e^{mx}$ $\quad m \in \mathbb{C}$, $m \neq -a$	$Q(x)e^{mx}$ avec $\deg P = \deg Q$, Q à déterminer
$P(x)e^{-ax}$	$xQ(x)e^{mx}$ avec $\deg P = \deg Q$, Q à déterminer

Exercice 12. Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' + 2y = x + 1$
2. $y' + y = x^2$
3. $y' + y = x^2 + x + 1$.
4. $y' + 5y = xe^{-2x}$
5. $y' + 2y = xe^{-2x}$.
6. $y' - 2y + e^x = 0$.

I. 4 Structure de l'ensemble des solutions

Théorème 13. La solution générale de (1) est la somme de la solution générale de l'équation différentielle homogène associée (2) et d'une solution particulière de (1). Ainsi, si :

- on connaît l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée (2) : $S_h = \{t \mapsto Ce^{-A(t)} \,|\, C \in \mathbb{R}\}$ où A est une primitive de a
- On note y_p une solution particulière de (1)

Alors l'ensemble des solutions de (1) est : $S_h = \{t \mapsto y_p(t) + Ce^{-A(t)} \,|\, C \in \mathbb{R}\}$

Méthode pour résoudre une équation différentielle linéaire du premier ordre

- Commencer par dire que c'est une équation différentielle linéaire du premier ordre.
- Résoudre l'équation différentielle homogène associée.
- Recherche d'une solution particulière de l'équation avec second membre.
- Additionner les deux.

I. 5 Équation différentielle linéaire du premier ordre avec condition initiale

Proposition 14. Soit $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$.
L'équation différentielle linéaire du premier ordre $y' + a(x)y = b(x)$ admet une unique solution y vérifiant $y(x_0) = y_0$.
La condition $y(x_0) = y_0$ détermine la constante.

Méthode pour trouver une solution vérifiant une condition initiale :

- Résoudre l'équation différentielle avec la méthode générale.
- Utiliser la condition $y(t_0) = y_0$ pour déterminer la constante C.

Exercice 15. Résoudre sur $\mathbb{R}^{+\star}$ l'équation différentielle $y' - \dfrac{3y}{x} = x$ avec $y(1) = 2$.

II Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

On considère dans toute cette partie I un intervalle de $\mathbb{R}$, (a, b, c) trois constantes réelles avec $a \neq 0$ et $f : I \to \mathbb{K}$ continue (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

II. 1 Définitions et notations

Définition 16. Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants :

- On appelle équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants toute équation de la forme :

$$ay' + by' + cy = f(t)$$

- Lorsque f est la fonction nulle, on dit que c'est une équation homogène. On appelle équation homogène associée à (1) l'équation :

$$ay' + by' + cy =$$

- On appelle équation caractéristique associée, l'équation :

$$aX^2 + bX + c = 0$$

d'inconnue X.

Définition 17. Solution d'une équation différentielle linéaire du second ordre :
On appelle solution de l'équation différentielle linéaire (1) toute fonction u

- Définie et dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$au''(x) + bu'(x) + cu(x) = f(x)$$

II. 2 Résolution de l'équation linéaire homogène associée

Proposition 18. On note Δ le discriminant de l'équation caractéristique associée (3). Les solutions de l'équation différentielle homogène associée (2) sont données par :

- Si $\Delta > 0$, l'équation caractéristique admet deux racines rélles distinctes r_1 et r_2 et

$$S_h = \{t \mapsto C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} \,|\, (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2\}$$

- Si $\Delta = 0$, l'équation caractéristique admet une racine double r et

$$S_h = \{t \mapsto C_1 e^{rt} + C_2 t e^{rt} \,|\, (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2\}$$

- Si $\Delta < 0$, l'équation caractéristique admet deux racines complexes conjuguées $\alpha \pm i\omega$ et

$$S_h = \{t \mapsto C_1 \cos(\omega t) e^{\alpha t} + C_2 \sin(\omega t) e^{\alpha t} \,|\, (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2\}$$

Remarque. On notera l'analogie avec les suites linéaires récurrentes d'ordre deux.

Exercice 19. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes

1. $y'' - y = 0$
2. $y'' + w^2 y = 0$ avec $w > 0$
3. $y'' - 2y' + y = 0$

II. 3 Solution particulière avec second membre

❶ Principe de superposition

Proposition 20. Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ trois réels avec $a \neq 0$, $f_1, f_2 : I \to \mathbb{K}$ deux fonctions continues sur I et soient $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$. Si y_1 et y_2 sont respectivement des solutions de

$$ay'' + by' + cy = f_1(x) \qquad \text{et} \qquad ay'' + by' + cy = f_2(x)$$

alors $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ est solution de

$$ay'' + by' + cy = \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)$$

❷ Seconds membres particuliers

La proposition suivante récapitule sous quelle forme il faut chercher la solution particulière y_p selon la forme du second membre $f(x)$ de l'équation différentielle à coefficients constants. On rappelle ici qu'à toute équation différentielle du second ordre à coefficients constants : $ay''+by'+cy=f(x)$, on lui associe l'équation caractéristique

$$ax^2+bx+c=0 \tag{EC}$$

Expression de $f(x)$ et condition éventuelle	**Forme de la solution particulière $y_p(x)$**
Polynôme de degré n avec $c\neq 0$	Polynôme de degré n à déterminer
e^{mx} $m\in\mathbb{C}$, m n'est pas racine de (EC)	αe^{mx}, α à déterminer
e^{mx} $m\in\mathbb{C}$, m est racine simple de (EC)	αxe^{mx}, α à déterminer
e^{mx} $m\in\mathbb{C}$, m est racine double de (EC)	αx^2e^{mx}, α à déterminer
$P(x)e^{mx}$ $m\in\mathbb{C}$, m n'est pas racine de (EC)	$Q(x)e^{mx}$ avec $\deg P=\deg Q$, Q à déterminer
$P(x)e^{mx}$ $m\in\mathbb{C}$, m est racine simple de (EC)	$xQ(x)e^{mx}$ avec $\deg P=\deg Q$, Q à déterminer
$P(x)e^{mx}$ $m\in\mathbb{C}$, m est racine double de (EC)	$x^2Q(x)e^{mx}$ avec $\deg P=\deg Q$, Q à déterminer
$\cos(wx)$ ou $\sin(wx)$ $w\in\mathbb{R}^\star$, iw pas racine de (EC)	$\alpha\cos(wx)+\beta\sin(wx)$, α,β à déterminer
$\cos(wx)$ ou $\sin(wx)$ $w\in\mathbb{R}^\star$, iw racine de (EC)	$\alpha x\cos(wx)+\beta x\sin(wx)$, α,β à déterminer

Exercice 21.
1. Résoudre $y''-y=e^x-2e^{3x}$
2. Résoudre $y''-2y'+2y=2x^2-4x+4$.
3. Résoudre $2y''-y'-y=3\cos(2x)-\sin(2x)$.
4. Résoudre $y''-2y'+2y=xe^{(1+i)x}$.

II. 4 Structure de l'ensemble des solutions

$$ay'+by'+cy=f(t) \tag{1}$$

$$ay'+by'+cy=0 \tag{2}$$

Théorème 22. La solution générale de (1) est la somme de la solution générale de l'équation différentielle homogène associée (2) et d'une solution particulière de (1). Ainsi, si :

- on connaît l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée (2) :

$$S_h = \{t \mapsto C_1u_1(t) + C_2u_2(t) \,|\, (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2\}$$

- On note y_p une solution particulière de (1)

Alors l'ensemble des solutions de (1) est :

$$S_h = \{t \mapsto y_p(t)C_1u_1(t) + C_2u_2(t) \,|\, (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2\}$$

Méthode : Résoudre une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants

- Commencer par dire que c'est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants.
- Résoudre l'équation différentielle homogène associée.
- Rechercher une solution particulière de l'équation avec second membre.
- Additionner les deux.

II. 5 Équation différentielle linéaire du second ordre avec condition initiale

Il y a deux constantes à déterminer, donc pour avoir unicité de la solution, il faut, cette fois-ci, avoir deux conditions initales.

Proposition 23. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et $(y_0, y_1) \in \mathbb{R}^2$.
L'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants $ay'' + by' + cy = f(x)$ admet une unique solution y vérifiant

$$\left\{\begin{array}{lcl} y(x_0) & = & y_0 \\ y'(x_0) & = & y_1. \end{array}\right.$$

Méthode pour trouver une solution vérifiant une condition initiale :

- Résoudre l'équation différentielle avec la méthode générale.
- Utiliser les conditions $y(t_0) = y_0$ et $y'(x_0) = y_1$ pour déterminer les constantes A et B.

Exercice 24. Résoudre $y'' - 2y' - 3y = 9x^2$ avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.