TD - 10 : Equations Différentielles

I Équations différentielles linéaires du premier ordre

Exercice 1. Résoudre les équations différentielles suivantes sur l'intervalle indiqué

1. $y' - 2y = x + x^2$ sur $\mathbb{R}$
2. $3y' - 2y = x$ sur $\mathbb{R}$
3. $y' = y + 1$ sur $\mathbb{R}$
4. $y' = -y + e^x$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 2. Résoudre les équations différentielles suivantes sur l'intervalle indiqué

1. $(1 + x^2)y' + 2xy = 1$ sur $\mathbb{R}$
2. $x^2y' - y = e^{-\frac{1}{x}}$ sur $\mathbb{R}^{+\star}$
3. $xy' - (1 + 2x)y = -x^2e^x$ sur $\mathbb{R}^{+\star}$
4. $y' - 2xy = -(2x - 1)e^x$ sur $\mathbb{R}$
5. $y' - \dfrac{x^2 + 1}{x(x^2 - 1)}y = 2$
6. $y' + \cos^3(x)y = 0$ sur $\mathbb{R}$
7. $y' + \dfrac{2}{x^2 - 1}y = x$ sur $]1, +\infty[$

Exercice 3. Déterminer la solution générale des équations différentielles suivantes

1. $(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2$
2. $y' + \dfrac{1 - 2x}{x^2}y = 1$
3. $y' - y = x^2(e^x + e^{-x})$
4. $xy' + (1 - 2x)y = 1$
5. $x^3y' + 4(1 - x^2)y = 0$
6. $(1 - x^2)y' - 2xy = 1$
7. $(\tan x)y' + y - \sin x = 0$
8. $y' + (\tan x)y = \sin x + \cos^3 x$
9. $x^2y' - y = x^2 - x + 1$. On pourra chercher une solution particulière polynomiale.

Exercice 4. Problèmes de raccords de solutions définies sur des intervalles disjoints :

1. On considère l'équation différentielle (E) : $xy' + y = 1$. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}^{+\star}$ puis sur $\mathbb{R}^{-\star}$. Montrer que (E) admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.
2. On considère l'équation différentielle (E) : $(1 - x^2)y' - 2xy = x^2$. Résoudre (E) sur chaque intervalle où cela a un sens, puis étudier les éventuels raccords.
3. On considère l'équation différentielle (E) : $(x \ln x)y' - y = 0$. Résoudre (E) sur chaque intervalle où cela a un sens, puis étudier les éventuels raccords.
4. Étude des solutions sur $\mathbb{R}^{+\star}$, $\mathbb{R}^{-\star}$ et sur $\mathbb{R}$ de (E) : $xy' + 2y = \dfrac{x}{1 + x^2}$.

Exercice 5. Résoudre les problèmes de Cauchy suivants en précisant à chaque fois l'intervalle de travail (mais sans étudier les problèmes de raccord) :

1. $y' \cos x - y \sin x = 0$ et $y(0) = 1$
2. $y' + xy = 2x$ et $y(0) = 1$

II Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

Exercice 6. Résoudre les équations différentielles suivantes

1. $y'' + 4y' + 4y = x^2e^x$
2. $y'' + 4y' + 4y = x^2e^{-2x}$
3. $y'' + 4y' + 4y = \sin xe^{-2x}$
4. $y'' - 6y' + 9y = e^x$
5. $y'' - 2y' + 2y = x^2 + x$
6. $2y'' - y' - y = e^x + e^{-x}$
7. $y'' - 2y' + 3y = \cos x$
8. $4y'' + 4y' + y = x + x^2 + 3\sin x + e^{3x} + xe^{-\frac{x}{2}}$
9. $y'' - my + y = 0$ avec $m \in \mathbb{R}$
10. $y'' + y = x^2 \cos x$
11. $y'' + y = \cos x + \sin(2x)$

Exercice 7. Résoudre les équations différentielles suivantes, puis déterminer l'unique solution vérifiant $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.

1. $y'' + 8y' + 15y = 5$
2. $4y'' - 4y' + y = 4$
3. $y'' - 2y' + 5y = 5$
4. $y'' - 2y' = 2$

Exercice 8. On considère un paramètre réel m. Résoudre l'équation différentielle suivante en discutant selon les valeurs de m :

$$y'' - (m + 1)y' + my = e^x - x - 1.$$

Exercice 9. Résoudre les problèmes de Cauchy suivants :

1. $y'' - 4y' + 5y = e^x$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$
2. $y'' - 4y' + 5y = e^{2x}$ avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$

III Ǫuelques problèmes issues de la physique chimie

III. 1 Equations d'ordre 1

Exercice 10. Cinétique chimique
On considère la réaction chimique d'équation bilan : $2N_2O_5 \to 4NO_2 + O_2$. Cette réaction a une cinétique d'ordre 1, c'est-à-dire que la vitesse de disparition du pentaoxyde de diazote, définie par $v = -\dfrac{1}{2}\dfrac{d[N_2O_5]}{dt}$ vérifie l'équation : $v = k[N_2O_5]$.
En posant $y(t) = [N_2O_5](t)$, et en notant $c_0 = y(0)$, donner l'expression exacte de la vitesse de disparition du pentaoxyde de diazote, et tracer sa courbe.

Exercice 11. Loi de Fick
Une cellule est plongée dans une solution de potassium de concentration c_p. On note $c(t)$ la concentration de potassium dans la cellule à l'instant t, et on suppose que $c(0) = 0$. D'après la loi de Fick, la vitesse de variation de la concentration de potassium dans la cellule est proportionnelle au gradient de concentration $c_p - c(t)$, c'est-à-dire qu'il existe une constante τ homogène à un temps telle que

$$c'(t) = \frac{c_p - c(t)}{\tau}.$$

Déterminer $c(t)$ et tracer le graphe de c.

Exercice 12. Datation au carbone 14.
La vitesse de désintégration du carbone 14 est proportionnelle à sa quantité présente dans le matériau considéré. Ainsi, si on note $y(t)$ le nombre d'atomes de carbone 14 présents dans un échantillon de matière organique à l'année t, y vérifie l'équation différentielle

$$y'(t) = -ky(t),$$

où $k = 1.238 \times 10^{-4}\text{an}^{-1}$ est la constante de désintégration du carbone 14.

1. Calculer l'expression explicite de $y(t)$ en fonction du nombre N_0 d'atomes de carbone 14 à l'instant $t = 0$.
2. On appelle demi-vie d'un élément radioactif le temps au bout duquel la moitié de ses atomes se sont désintégrés. Déterminer la demi-vie du carbone 14.
3. Lors de fouilles, on a découvert un fragment d'os dont la teneur en carbone 14 vaut 70% de celle d'un os actuel de même masse. Estimer l'âge de ces fragments.

III. 2 Equations d'ordre 2

Exercice 13.

1. **Circuit RC**
   On place en série un condensateur de capacité C et une résistance R, alimentés par un générateur de force électromotrice V. La charge $q(t)$ du condensateur vérifie alors l'équation
   $$q'(t) + \frac{1}{RC} q(t) = \frac{V}{R}.$$
   Calculer l'expression explicite de q, sachant que la charge initiale est nulle, et tracer le graphe de q.
2. **Circuit LC**
   On place en série un condensateur de capacité C et une bobine d'inductance L, alimentés par un générateur de force électromotrice V. La charge $q(t)$ du condensateur vérifie alors l'équation
   $$q''(t) + \frac{1}{LC} q(t) = \frac{V}{L}.$$
   Calculer l'expression explicite de q, sachant que la charge initiale est nulle et que $q'(0) = 0$, et tracer le graphe de q.