

# TD 7 : Systèmes linéaires

## I Systèmes linéaires sans paramètre

**Exercice 1.** Déterminer le rang et résoudre les systèmes linéaires d'inconnues réelles suivants :

$$1. \begin{cases} 3x - y + z = 5 \\ 2x + y - z = 1 \\ x - y + z = 2 \\ 4x + y + z = 3 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 - 4x_5 = 0 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x + 2y + 3z - 2t = 6 \\ 2x - y - 2z - 3t = 8 \\ 3x + 2y - z + 2t = 4 \\ 2x - 3y + 2z + t = -8 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} x + 2y + 3z + 2t = 1 \\ x + 3y + 3z + t = 0 \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} 5a + b + 2c = 13 \\ 4a + 2b + c = 11 \\ a - b + c = 2 \\ 3a + b + c = 8 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x - y - z = 2 \\ 4x - y - z = 3 \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} 3x + 2y + z - u - v = 0 \\ x - y - z - u + 2v = 0 \\ -x + 2y + 3z + u - v = 0. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x + y + z - t = 1 \\ x - y - z + t = 2 \\ x - y - z - t = 3 \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} x - 2y + 3z - 4t = 4 \\ y - z + t = -3 \\ x + 3y - 3t = 1 \\ x + 2y + z - 4t = 4 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} 3x - y + z = 5 \\ x + y - z = -2 \\ -x + 2y + z = 3 \end{cases}$$

## II Systèmes linéaires avec paramètre

**Exercice 2.** Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ . On considère le système suivant

$$(S_\lambda) \begin{cases} 2x + 2y = \lambda x \\ x + 3y = \lambda y \end{cases}$$

1. Déterminer  $\Sigma$  l'ensemble des réels  $\lambda$  pour lequel ce système n'est pas de Cramer.
2. Pour  $\lambda \in \Sigma$ , résoudre  $S_\lambda$
3. Quelle est la solution si  $\lambda \notin \Sigma$ .

**Exercice 3.** Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ . On considère le système suivant

$$(S_\lambda) \begin{cases} 2x + y = \lambda x \\ y = \lambda y \\ -x - y + z = \lambda z \end{cases}$$

1. Mettre le système sous forme échelonné.
2. En donner le rang en fonction de  $\lambda$ .

- Déterminer  $\Sigma$  l'ensemble des réels  $\lambda$  pour lequel ce système n'est pas de Cramer.
- Pour  $\lambda \in \Sigma$ , résoudre  $S_\lambda$
- Quelle est la solution si  $\lambda \notin \Sigma$  ?

**Exercice 4.** Discuter les solutions dans  $\mathbb{R}$  des systèmes suivants en fonction des paramètres  $m \in \mathbb{R}$  ou  $r \in \mathbb{R}$  :

$$\begin{array}{ll}
 1. \begin{cases} mx + y + z = X \\ x + my + z = Y \\ x + y + mz = Z \end{cases} & 4. \begin{cases} (m-1)x - my = m \\ (m+1)x + (m+1)y = m^2 - 1 \end{cases} \\
 2. \begin{cases} (m+1)x + my = 2m \\ mx + (m+1)y = 1 \end{cases} & 5. \begin{cases} x + my = m^2 \\ mx + y = m^2 \end{cases} \\
 3. \begin{cases} x - my + m^2z = 2m \\ mx - m^2y + mz = 2m \\ mx + y - m^2z = 1 - m \end{cases} & 6. \begin{cases} y + z = rx \\ x + z = ry \\ x + y = rz \end{cases}
 \end{array}$$

### III Divers

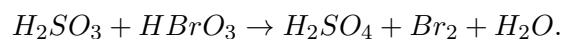
**Exercice 5.** Soit la fonction  $f$  définie par :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto (3x + 2y, 5x + 3y). \end{cases}$$

Montrer que pour tout  $(X, Y) \in \mathbb{R}^2$ , il existe un unique  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $f(x, y) = (X, Y)$  et donner l'expression de  $x$  et  $y$  en fonction de  $X$  et  $Y$ .

*Remarque : on dit que  $f$  est bijective. La fonction qui à  $(X, Y)$  associe l'expression trouvée pour  $(x, y)$  est appelée bijection réciproque de  $f$  et est notée  $f^{-1}$ . On peut vérifier que  $f^{-1}(f(x, y)) = (x, y)$  et que  $f(f^{-1}(X, Y)) = (X, Y)$ .*

**Exercice 6.** Équilibrer la réaction chimique suivante :



**Exercice 7.** La somme des carrés.

- Trouver un polynôme de degré 3 tel que  $P(X+1) - P(X) = X^2$ .
- Retrouver alors l'expression de  $S_n = \sum_{k=1}^n k^2$ .

**Exercice 8.** On considère les points  $A = (1, 2, -1)$  et  $B = (-2, 4, 0)$ .

- Déterminer une représentation paramétrique et une représentation cartésienne de  $(AB)$ .
- En fonction de  $m \in \mathbb{R}$ , déterminer l'intersection de  $(AB)$  avec la droite  $\mathcal{D}_m$  représentée paramétriquement par

$$\begin{cases} x = s + 3 \\ y = -2s + 2 \\ z = 2s + m \end{cases} ; \quad s \in \mathbb{R}.$$