Chapitre 8 - Etude de fonctions

I Notions de base

Définition 1. Soit f une fonction. On dit qu'elle est définie sur un ensemble D si pour tout x de D on peut associer une valeur à $f(x)$.

Définition 2. On dit qu'une fonction f est croissante (respectivement décroissante) sur un intervalle I si pour tout $x, y \in I$,

$$x \leq y \Longrightarrow f(x) \leq f(y) \quad \text{resp. } f(x) \geq f(y)$$

Définition 3. Soit f une fonction définie sur $D \subset \mathbb{R}$. On appelle courbe représentatitve de f (ou graphe), la courbe du plan notée $\mathcal{C}_f$ et définie par :

$$\mathcal{C}_f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \in D\}.$$

Définition 4. Soit f une fonction définie sur I et g une fonction définie sur J tel que pour tout $x \in I$, $f(x) \in J$, on définit alors la composée de g avec f, notée $g \circ f$, définie sur I par

$$g \circ f(x) = g(f(x))$$

Ainsi quand on a fonction qui correspond à une composée de plusieurs fonctions il faut vérifier que la fonction « la plus à l'intérieure »prend des valeurs dans l'ensemble de définition de la fonction « la plus à l'extérieure »

Exemple : Ecrire la fonction

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\ln(x) + 2}}$$

comme composée de plusieurs fonctions. Déterminer son ensemble de définition

II Rappel sur la dérivation

Définition 5. Soit f une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. On dit que f est dérivable en $x_0 \in I$ si $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existe et est finie. Dans ce cas on note $f'(x_0)$ cette limite.

⚠ Avant tout calcul de dérivée, vous devez justifier que la fonction est bien dérivable. On ne reviendra heureusement que rarement (si ce n'est quasiment jamais) à cette définition.

On vériife une fois pour toute que les fonctions usuelles : $\cos, \sin, \tan, \exp, \ln, x^\alpha$ sont dérivables et ensuites les fonctions que l'on est amenée à étudier seront des sommes, produits, quotients et fractions et composition de ces fonctions usuelles.

II. 1 Opérations sur les dérivées : Calcul de dérivée

Proposition 6. Soient u et v deux fonctions dérivables sur I.

- ⋆ Le produit uv est dérivable sur I et

$$(uv)' = u'v + uv'$$

- ⋆ Si v ne s'annule pas sur I, alors le quotient de u par v est dérivable sur I et

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

- ⋆ En particulier si v ne s'annule pas sur I, alors l'inverse de v est dérivable sur I et

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-v'}{v^2}$$

- ⋆ Si f est une fonction dérivable sur un intervalle J avec $\forall x \in I, g(x) \in J$, alors la composée de f par g est dérivable sur I et :

$$\forall x \in I, (f \circ g)'(x) = g'(x) \times f'(g(x))$$

$$\text{c'est-à-dire : } (f \circ g)' = g' \times f' \circ g$$

Exemples. Dérivées des composées de référence : soit u une fonction dérivable sur I et $n \in \mathbb{N}^\star$.

- La fonction u^n est dérivable sur I et

$$(u^n)' = nu'u^{n-1}$$

- Si $\forall x \in I, u(x) \neq 0$ alors la fonction $\dfrac{1}{u^n}$ est dérivable sur I et

$$\left(\frac{1}{u^n}\right)' = \frac{-nu'u^{n-1}}{u^{2n}} = \frac{nu'}{u^{n+1}}$$

- Si $\forall x \in I, u(x) > 0$ alors $\sqrt{u}$ est dérivable sur I et
$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$
- Si $\forall x \in I, u(x) > 0$ alors la fonction $\ln u$ est dérivable sur I et
$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$
- La fonction e^u est dérivable sur I et
$$(e^u)' = u' \times e^u$$
- La fonction $\cos(u)$ est dérivable sur I et
$$(\cos(u))' = -u' \sin(u)$$
- La fonction $\sin(u)$ est dérivable sur I et
$$(\sin(u))' = u' \cos(u)$$
- Si $\forall x \in I, u(x) \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$ alors la fonction $\tan u$ est dérivable sur I et
$$(\tan u)' = u' \frac{1}{\cos^2(u)}$$

Exercice 7. Étudier la dérivabilité des fonctions suivantes et calculer leur dérivées :
1. $f(x) = \cos^4(5x)\sin^3(2x)$
2. $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^4+1}{x^2+1}\right)$
3. $f(x) = \dfrac{x\ln x}{e^{x^2}}$
4. $f(x) = \dfrac{\sin^4(2x)}{\sqrt{x^2-1}}$

II. 2 Lien avec le sens de variation d'une fonction

Dans la plupart des situations, étudier la monotonie d'une fonction se ramène à étudier le signe de sa dérivée.

Proposition 8. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
- f est croissante sur $I \iff \forall x \in I,\ f'(x) \geqslant 0$.
- f est décroissante sur $I \iff \forall x \in I,\ f'(x) \leqslant 0$.
- f est constante sur $I \iff \forall x \in I,\ f'(x) = 0$.

Dans le cadre de la monotonie stricte, seule une implication reste valable :

Proposition 9.

- Si $\forall x \in I$, $f'(x) > 0$ (sauf en un nombre fini de points), alors f est strictement croissante sur I.
- Si $\forall x \in I$, $f'(x) < 0$ (sauf en un nombre fini de points), alors f est strictement décroissante sur I.

Remarque. Attention, f strictement croissante n'implique pas que la dérivée est partout strictement positive ! Contre-exemple : la fonction $f : x \mapsto x^3$ est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$ mais $f'(0) = 0$.

Exercice 10. Étudier les variations des fonctions suivantes : $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{6 - x - x^2}}$ et $g(x) = x + 3 + \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$.

II. 3 Équation d'une tangente

Proposition 11. Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $x_0 \in I$. Si f est dérivable en x_0 alors la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse x_0 existe bien et son équation est donnée par

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

⚠ Avant de donner l'équation de la tangente au point d'abscisse x_0, il ne faut pas oublier de justifier son existence à savoir que la fonction est bien dérivable en x_0.

Exercice 12. Donner l'équation de la tangente au point d'abscisse 1 de la fonction f définie par : $f(x) = x^2 - x\ln(x) - 1$.

III Limites

Proposition 13. Taux d'accroissement

Proposition 14. Croissance comparée