Chapitre 9 : Integration et calcul de primitives

Table des matières

Dans tout le chapitre, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point.

I Primitive. Définition de l'intégrale

I. 1 Primitive d'une fonction continue sur un intervalle

Définition 1. Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On appelle primitive de f sur I toute fonction F qui vérifie :

- F est $\mathcal{C}^1(I)$.
- $\forall x \in I,\ F'(x) = f(x)$.

Exemples.

- La fonction $x \mapsto x$ admet comme primitive sur $\mathbb{R}$ la fonction $x \mapsto \dfrac{x^2}{2}$
- La fonction $x \mapsto \cos(x)$ admet comme primitive sur $\mathbb{R}$ la fonction $x \mapsto \sin(x)$
- La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ admet comme primitive sur $\mathbb{R}^{+\star}$ la fonction $\mapsto \ln(|x|)$

- La fonction $x \mapsto e^{2x}$ admet comme primitive sur $\mathbb{R}$ la fonction$x \mapsto \dfrac{e^{2x}}{2}$

Théorème 2. Théorème fondamental :

- Toute fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ admet une primitive sur I
- Si F_1 et F_2 sont deux primitives de f sur I, alors il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in I$, $F_1(x) = F_2(x) + c$.

Ainsi pour justifier qu'une primitive de f existe sur I il suffit de :
Justifier que f est continue sur I.

⚠ Le théorème précédent ne s'applique que si I est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Exercice 1. En dérivant la fonction $f : x \mapsto \arctan\left(\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$, donner une autre expression de f.

Voir le tableau des primitives usuelles

Exercice 2. Calculer une primitive des fonctions suivantes après avoir justifié son existence :

1. $x \mapsto 4 - 5x + 6x^2 + 8x^3 - x^5$.
2. $x \mapsto a^x$ avec $a > 0$.
3. $x \mapsto \dfrac{1}{2x-5}$.
4. $x \mapsto \dfrac{1}{a^2+x^2}$, $a \neq 0$.
5. $x \mapsto (3x^2+2)\sqrt{2x^3+4x}$
6. $f : x \mapsto xe^{-x^2}$.
7. $f : x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$.
8. $f : x \mapsto \cos(x)\sin^n(x)$.
9. $f : x \mapsto \dfrac{1}{(x-2)^2}$.
10. $f : x \mapsto \dfrac{1}{(4-x)^3}$.

I. 2 Intégrale d'une fonction continue sur un segment

Définition 3. Soit f une fonction continue sur le segment $[a, b]$.

- On appelle intégrale de f de a à b le réel : $F(b) - F(a)$ où F est une primitive de f sur $[a, b]$
- $F(b) - F(a)$ est aussi noté $\int_a^b f(t)dt$

Exercice 3.

1. Calcul de $\displaystyle\int_0^1 (-4x^3 + x^2 + 3x + 4)dx$
2. Calcul de $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{2x-1}$
3. Calcul de $\displaystyle\int_0^1 xe^{x^2}dx$

Remarques.

- La variable d'intégration est muette
- La variable d'intégration ne doit JAMAIS apparaître dans les bornes ou à l'extérieur de l'intégrale.

I. 3 Interprétation géométrique de l'intégrale

On munit le plan d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction **continue** sur I et **positive** sur I.
Soit $(a, b) \in I^2$ avec $a < b$.
Soit $\mathcal{D} = \{M(x, y),\ a \leq x \leq b \text{ et } 0 \leq y \leq f(x)\}$.

Alors l'intégrale de f entre a et b est égale à l'aire de $\mathcal{D}$.

II Propriétés de l'intégrale

II. 1 Relation de Chasles

Proposition 4. Soient $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur I et a, b, c trois réels de I.

- $\displaystyle\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$
- $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
- $\displaystyle\int_a^a f(x)dx = 0$
- Si $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont aussi des réels de I, on a : $\displaystyle\int_{a_0}^{a_n} f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)dt$

Exercice 4.

1. Soit f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} xe^{x^2} & \text{si } x \geq 1 \\ \dfrac{10e}{9+x^2} & \text{si } x < 1. \end{cases}$ Calculer $\displaystyle\int_0^2 f(t)dt$.
2. Calculer $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin u|du$.

II. 2 Linéarité de l'intégrale

Proposition 5. Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ continues sur I et $a,\ b$ deux réels de I et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, on a

- $\displaystyle\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
- $\displaystyle\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$
- Si $f_1, \dots, f_n$ sont continues sur I et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ alors :
$$\int_a^b \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(x) \right) dx = \sum_{i=1}^n \left(\int_a^b \lambda_i f_i(x)dx \right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \left(\int_a^b f_i(x)dx \right)$$

Exercice 5. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)(x+2)}$. On pourra montrer qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\dfrac{1}{(x+1)(x+2)} = \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{b}{x+2}$.

II. 3 Intégrale et inégalité

II. 3. a Inégalités larges

Théorème 6. Théorème de positivité de l'intégrale : si on a

- f continue sur $[a, b]$.
- $\forall x \in [a, b]$, on a $f(x) \geq 0$.
- $a \leq b$.

Alors, $\displaystyle\int_a^b f(t)dt \geq 0$.

Remarque. On a un résultat similaire pour les fonctions négatives.

Etude du signe d'une intégrale = étude du signe de la fonction à l'intérieur.

Exercice 6. Montrer que $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{3}} \frac{\ln(1+x)}{x} dx \geq 0$ et que $\displaystyle\int_2^3 \frac{x^2 + x - 2}{-x^2 + x + 12} dx \geq 0$.

Application : étude de suite définie par une intégrale.

L'étude de suite définie par des intégrales fait partie des exos types sur les intégrales à connaître parfaitement. Le plus souvent pour étudier la convergence de telles suites, on utilise le théorème sur les suites monotones et ainsi il faut montrer que la suite est soit croissante et majorée, soit décroissante et minorée.

Méthode pour l'étude de la monotonie d'une suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par une intégrale : Signe de $I_{n+1} - I_n$: étude du signe de la fonction à l'intérieur + théorème de positivité de l'intégrale.

Exercice 7. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^n}$. Étudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Théorème 7. Théorème de croissance de l'intégrale : si

- f, g, h continue sur $[a, b]$.
- $\forall x \in [a, b]$, on a $g(x) \leq f(x) \geq h(x)$.
- $a \leq b$.

Alors on a : $\displaystyle\int_a^b g(x)dx \ \leq \ \int_a^b f(x)dx \ \leq \ \int_a^b h(x)dx.$

Encadrement d'une intégrale = encadrement de la fonction à l'intérieur.

Application : étude de suite définie par une intégrale

Méthode pour calculer la limite d'une suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par une intégrale : Théorème de croissance de l'intégrale + théorème des gendarmes ou théorème de comparaison

On NE peut PAS passer à la limite directement à l'intérieur de l'integrale. (intervertion de limite, l'intégrale est déjà une limite en quelque sorte)

Exercice 8. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^n}$. Étudier la convergence de cette suite.

Exercice 9.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n(1-t)^n dt$. Calculer la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $J_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx$. Calculer la limite de la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On pourra en particulier montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq J_n \leq \dfrac{1}{n+1}$.

II. 4 Intégrale et valeur absolue

Théorème 8. Inégalité triangulaire pour les intégrales :

- f continue sur $[a, b]$
- $a < b$

Alors : $\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|\, dt$

Exercice 10. Soit g une fonction continue sur $[0, 1]$. Montrer qu'il existe un réel $x_0 \in [0, 1]$ tel que : $\left|\int_0^1 g(x)\sin(x)dx\right| \leq |g(x_0)|$.

II. 5 Primitive comme intégrale

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur I et soit $a \in I$. On peut alors définir une fonction $g : I \to \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in I,\ g(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Proposition 9. Soient $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur I, $a \in I$ et $g : x \in I \mapsto \int_a^x f(t)dt$. Alors :

- g est de classe dérivable sur I
- $g(x) = F(x) - F(a)$ avec F une primitive de f
- $\forall x \in I,\ g'(x) = f(x)$

Remarque. La fonction g ainsi définie est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a.

III Méthodes de calcul d'intégrales

III. 1 Reconnaître une primitive usuelle

Bien connaître le tableau des primitives usuelles.
Voir le tableau des primitives usuelles
Calculer des fonctions dérivées à la chaine...
Vérifier rapidement que notre primitive est bien une primitive.

III. 2 Intégration par parties

Proposition 10. Intégration par parties :
Si u et v sont deux fonctions de classe C^1 sur $[a, b]$. Alors :

$$\int_{a^b} u(t)v'(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)dt$$

Quand utiliser l'IPP ?

- Si la fonction est de type

$$\text{Polynôme} \times \left\| \begin{array}{l} \text{cosinus, sinus} \\ \text{exponentielle, ln} \\ \text{arctangente} \end{array} \right.$$

- Obtenir des relations de récurrence pour l'étude des suites définies par des intégrales.

Méthode avec une IPP :

- On pose :
$$\left\{ \begin{array}{ll} u(t) = ... & u'(t) = ... \\ v'(t) = ... & v(t) = ... \end{array} \right.$$
- Les fonctions u et v sont de classe C^1 sur l'intervalle $[a, b]$, donc par intégration par partie, on a :

$$\int_a^b u(t)v'(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)dt$$

Quelle fonction doit-on dériver ?
Le choix de la fonction que l'on dérive suit la loi ALPET :

- D'abord A comme arctangente
- Puis L comme logarithme népérien
- Puis P comme polynôme
- Puis E comme exponentielle
- Enfin T comme trigonométrie

Exercice 11. Calculer les intégrales suivantes

1. $I(x) = \displaystyle\int_1^x \ln t dt.$
2. $I(x) = \displaystyle\int_0^x \arctan t dt.$
3. $I = \displaystyle\int_0^1 x^2 \sin x dx.$
4. $I = \displaystyle\int_0^\pi \cos x e^x dx.$

Application : Étude de suite définie par une intégrale :

Relation de récurrence pour une suite définie par une intégrale : Intégration par partie

Exercice 12. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_1^e (\ln t)^n t^2 dt$. Trouver une relation de récurrence.

III. 3 Changement de variables

Proposition 11. Changement de variables : si

- $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction continue sur I
- et $\varphi : [a, b] \to I$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$.

Alors

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Remarque : On applique souvent des changements de variables avec φ bijective. Dans ce cas, on a la formule suivante :

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_{\varphi^{-1}(\alpha)}^{\varphi^{-1}(\beta)} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

- On pose $u = \varphi(t)$. ($\varphi^{-1}(u) = t$, si φ bijective)
- On calcule du en fonction de t. ($du = \varphi'(t)dt$)
- On calcule la nouvelle fonction à intégrer.
- On calcule les nouvelles bornes de l'intégrale.

Exercice 13. Calculer $I = \int_0^1 \frac{e^{2x}}{e^x + 1} dx$, $J = \int_1^2 \frac{1}{1 + \sqrt{x}} dx$ et $K = \int_0^1 \sqrt{1 - u^2} du$.

IV Une méthode de calcul approché d'intégrale : la méthode des rectangles

Nous allons ici utiliser la méthode dite des rectangles pour déterminer une valeur approchée de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment. On se limite ici au cas d'une fonction f continue sur le segment $[0, 1]$. On souhaite approcher $\int_0^1 f(t)dt$.

- Subdivision régulière de $[0, 1]$ de pas $\frac{1}{n}$: c'est la subdivision de $[0, 1]$ de la forme

$$x_0 = 0 < x_1 = \frac{1}{n} < ... < x_k = \frac{k}{n} < ... < x_n = 1$$

- Approximation de $\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)dt$:

- ⋆ Approximation à gauche : $\displaystyle\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)dt \simeq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f\left(\frac{k}{n}\right) dt = \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$
- ⋆ Approximation à droite : $\displaystyle\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)dt \simeq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f\left(\frac{k+1}{n}\right) dt = \frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right)$

- Approximation de $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt$:
  - ⋆ Approximation à gauche :

  - ⋆ Approximation à droite :

IV. 1 Sommes de Riemann, théorème de Riemann

Définition 12. $R_n = \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$ et $S_n = \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ sont appelées sommes de Riemann associées à f

Exercice 13. 1. Ecrire une fonction Python qui prend en argument un nombre n et une fonction f et retourne la valeur de R_n

2. Faire de même avec S_n.

Théorème 14. Si f est continue sur $[0,1]$ alors :

$$\lim_{n\to+\infty} R_n = \lim_{n\to+\infty} S_n = \int_0^1 f(t)dt$$

Exemples d'application Ce théorème permet de calculer la limite de certaines sommes.

- Mettre u_n sous la forme $u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$ ou $u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$.
- D'après le théorème sur les sommes de Riemann : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \int\limits_0^1 f(t)dt$.

Exercice 15. Calculer la limite des suites définies $\forall n \in \mathbb{N}^\star$,

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \quad \text{et} \quad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \quad \text{et} \quad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n(n+k)}}$$

Remarques :

- On peut montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
$$\left|\int_0^1 f(t)dt - S_n\right| \leq \frac{M}{n}$$
où M est le maximum de f sur $[0,1]$.

Exercice 16. En déduire un programme Python qui permet de calculer $\ln(2)$ à 10^{-2} prés.

IV. 2 Généralisation

On peut généraliser ce résultat sur un intervalle $[a,b]$ (avec $a < b$) quelconque. Les sommes de Riemann sont alors définies par :

$$R_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) \quad \text{et} \quad S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right)$$

De plus, cette méthode permet de définir l'intégrale de fonctions qui ne sont pas continues.

Définition 17. Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite continue par morceaux sur I si pour tout segment $[a, b]$ de I, on peut trouver une subdivision $(x_i)_{i=0\dots n}$ telle que pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$:

- f est continue sur $]x_i, x_{i+1}[$
- f admet des limites finies en x_i et x_{i+1}

Exemples.

- $x \mapsto \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$ (exemple très important pour la deuxième année)
- $x \mapsto \lfloor x \rfloor$
- $x \mapsto \begin{cases} x+1 & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 2x-1 & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$

Théorème 18. Si f est continue par morceaux sur $[a, b]$ alors : f est intégrable sur $[a, b]$

Remarque. On trouve la valeur de l'intégrale en calculant l'intégrale sur chaque intervalle où la fonction est continue, puis en utilisant la relation de Chasles.

Exercice 19. Calculer $\displaystyle\int_{-1/2}^{2} \lfloor t \rfloor \, dt$

Exercice 20. Ecrire un programme Python qui permet de calculer $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{1+x} dx$