DM3

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit la somme pour tout $x \in]0, 2\pi[$:

$$Z_n(x) = \sum_{k=0}^{n} e^{ikx}.$$

1. Montrer par récurrence que $Z_n(x) = \frac{1-e^{(n+1)ix}}{1-e^{ix}}$.
2. Montrer que

$$Z_n(\frac{\pi}{n}) = \frac{1+e^{i\frac{\pi}{n}}}{1-e^{i\frac{\pi}{n}}}$$

   Et en déduire la valeur de $Re(Z_n(\frac{\pi}{n}))$ et $Im(Z_n(\frac{\pi}{n}))$

   On pose pour $n \geq 2$:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$

3. Justifier que $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.
4. Exprimer S_n en fonction de Z_n.
5. En déduire que : $S_n = \dfrac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$.
6. En déduire la valeur de $\tan\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$.
7. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n}$. (On rappelle que $\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1$. Le prouver à l'aide de la définition de la dérivée)

Exercice 2. Soit $\mathbb{U}$ l'ensemble des complexes de module 1.

1. Calculer

$$\inf\left\{\left|\frac{1}{z} + z\right|, z \in \mathbb{U}\right\}$$

2. Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ on note $\alpha(z) = \frac{1}{z} + z$.
   (a) Calculer le module de $\alpha(z)$ en fonction de celui de z.
   (b) Montrer que pour tout $x > 0$ on a : $\dfrac{1}{x} + x \geq 2$.
   (c) En déduire

$$\inf\{|\alpha(z)|, z \in \mathbb{C}^*\}$$