Correction DM 6

Exercice 1. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 \\ 3 & -7 & 3 \\ 6 & -6 & 2 \end{pmatrix}$. On désigne par I_3 la matrice identité d'ordre 3 et par 0_3 la matrice nulle d'ordre 3. On se propose de calculer les puissances de A de plusieurs manières. Ainsi, les trois méthodes sont totalement indépendantes les unes des autres et aucun résultat d'une méthode précédente ne peux être utilisé dans une autre méthode.

1. **Méthode une :** On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   (a) Démontrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
   (b) Calculer $D = P^{-1}AP$ puis exprimer A en fonction de P, D et P^{-1}.
   (c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, donner et démontrer l'expression de A^n en fonction de P, D^n et P^{-1}.
   (d) Étudier l'inversibilité de A et calculer A^{-1} si A est inversible.
2. **Méthode deux :**
   (a) On pose $B = A - 2I_3$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, calculer B^n en fonction de B.
   (b) En déduire l'expression de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ en fonction de n, A et I_3.
   (c) On définit les trois suites réelles $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifient les relations
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} &= -x_n - 3y_n + 3z_n \\ y_{n+1} &= 3x_n - 7y_n + 3z_n \\ z_{n+1} &= 6x_n - 6y_n + 2z_n. \end{cases}$$
      i. Montrer que pour tout entier naturel n, on a :
      $$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}.$$
      ii. En déduire, pour tout entier naturel n, une expression de x_n, y_n et z_n en fonction de n et des réels x_0, y_0 et z_0.
      iii. Si $x_0 = y_0 = 1$ et $z_0 = 2$, les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont-elles convergentes ? Préciser les limites lorsqu'elles existent.
3. **Méthode trois :**
   (a) Donner une relation entre A^2, A et I_3.
   (b) La matrice A est-elle inversible ? Si oui, donner son inverse.
   (c) Démontrer qu'il existe deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que, pour tout entier n : $A^n = a_nA + b_nI_3$. Donner les relations de récurrence vérifiées par ces deux suites.
   (d) En déduire l'expression de a_n et de b_n en fonction de n puis celle de A^n en fonction de n, A et I_3.
   (e) En reprenant l'expression de l'inverse de A en fonction de A et de I_3, calculer $A^{-n} = (A^{-1})^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Correction 1.

1. **Méthode 1 : par diagonalisation**
   (a) **Montrons que P est inversible et calculer $\mathbf{P^{-1}}$:**

   La méthode du pivot de Gauss donne que $\boxed{P \text{ est inversible}}$ et que $\boxed{P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}}$.

(b) **Calculons $\mathbf{D = P^{-1}AP}$ puis exprimons $\mathbf{A}$ en fonction de $\mathbf{P}$, $\mathbf{D}$ et $\mathbf{P^{-1}}$:**

Le calcul donne $\boxed{D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.}$ De plus, comme P est inversible, on a

$$P^{-1}AP = D \Leftrightarrow AP = PD \Leftrightarrow \boxed{A = PDP^{-1}}$$

en utilisant le fait que $PP^{-1} = I_3$.

(c) **Démontrons que : $\forall \mathbf{n} \in \mathbb{N},\ \mathbf{A^n = PD^nP^{-1}}$ puis calculons $\mathbf{A^n}$:**

On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}(n)$: $\quad A^n = PD^nP^{-1}$.

- Initialisation : pour $n = 0$. D'un côté, on a : $A^0 = I_3$ et de l'autre côté, on a : $PD^0P^{-1} = PI_3P^{-1} = PP^{-1} = I_3$. Ainsi, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose la propriété vraie au rang n, montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$. On a : $A^{n+1} = A \times A^n$. Par hypothèse de récurrence, on a : $A^n = PD^nP^{-1}$ et on sait que : $A = PDP^{-1}$. On obtient ainsi : $A^{n+1} = PDP^{-1}PD^nP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$. Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
- Conclusion : il résulte du principe de récurrence que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = PD^nP^{-1}.}$

La matrice D étant diagonale, on sait que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & (-4)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-4)^n \end{pmatrix}.$$

En calculant alors les deux produits, on trouve

$$\boxed{A^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2^n + (-4)^n & (-4)^n - 2^n & 2^n - (-4)^n \\ 2^n - (-4)^n & 3(-4)^n - 2^n & 2^n - (-4)^n \\ 2(2^n - (-4)^n) & 2((-4)^n - 2^n) & 2^{n+1} \end{pmatrix}.}$$

(d) **Montrons que $\mathbf{A}$ est inversible puis calculons $\mathbf{A^{-1}}$:**

Comme la matrice D est une matrice diagonale et qu'elle n'a pas de zéro sur la diagonale, on sait tout de suite qu'elle est inversible et que son inverse est $D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$. Comme $A = PDP^{-1}$ et que D, P et P^{-1} sont toutes inversibles, alors A est inversible comme produits de matrices toutes inversibles. De plus, par propriété sur le produit de matrices inversibles, on sait que :
$A^{-1} = (P^{-1})^{-1}D^{-1}P^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$. Le calcul donne

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}.}$$

2. **Méthode 2 : par le binôme de Newton**

(a) **Calculons $\mathbf{B^n}$ en fonction de $\mathbf{B}$ avec $\mathbf{B = A_2I_3}$:**

Le calcul de B donne $B = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 3 \\ 3 & -9 & 3 \\ 6 & -6 & 0 \end{pmatrix}$. On obtient alors : $B^2 = \begin{pmatrix} 18 & 18 & -18 \\ -18 & 54 & -18 \\ -36 & 36 & 0 \end{pmatrix} = -6B$.

Puis en itérant, on trouve : $B^3 = 6^2B$. On peut conjecturer que : $\forall n \in \mathbb{N}^\star, B^n = (-6)^{n-1}B$.

- Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^\star$ la propriété : $\mathcal{P}(n)$: $\ B^n = (-6)^{n-1}B$.
- Initialisation : pour $n = 1$:
  D'un côté, on a B et de l'autre côté, on a : $(-6)^0B = B$. Ainsi, $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
- Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^\star$ fixé. On suppose la propriété vraie au rang n, montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$. Par hypothèse de récurrence, on a donc : $B^n = (-6)^{n-1}B$. De plus, on a : $B^{n+1} = B \times B^n$, ainsi, on obtient

$$B^{n+1} = B \times (-6)^{n-1}B = (-6)^{n-1}B^2 = (-6)^{n-1}(-6)B = (-6)^nB.$$

  Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

- Conclusion : il résulte du principe de récurrence que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ B^n = (-6)^{n-1}B.}$

(b) **Calculons l'expression de $\mathbf{A^n}$ pour tout $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$ en fonction de n, A et $\mathbf{I_3}$:**
On remarque que : $A = B + 2I_3$. Comme B et $2I_3$ commutent car I_3 commute avec toutes les matrices de taille 3, on peut appliquer le binôme de Newton et on obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = (B+2I_3)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k (2I_3)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k 2^{n-k}.$$

En utilisant alors la formule démontrée pour B^k vraie pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$, on obtient

$$\begin{array}{rcc}
A^n & = & 2^n I_3 + \sum\limits_{k=1}^{n} \binom{n}{k} B^k 2^{n-k} \\
& = & 2^n I_3 + \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-6)^{k-1} 2^{n-k}\right) B \\
& = & 2^n I_3 - \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-6)^{k} 2^{n-k}\right) \dfrac{B}{6} \\
& = & 2^n I_3 - \left(\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-6)^{k} 2^{n-k} - 2^n\right) \dfrac{B}{6} \\
& = & 2^n I_3 - ((-4)^n - 2^n) \dfrac{A - 2I_3}{6} \\
& = & \dfrac{(-4)^n + 2^{n+1}}{3} I_3 + \dfrac{2^n - (-4)^n}{6} A.
\end{array}$$

On obtient alors

$$\boxed{A^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2^n + (-4)^n & (-4)^n - 2^n & 2^n - (-4)^n \\ 2^n - (-4)^n & 3(-4)^n - 2^n & 2^n - (-4)^n \\ 2(2^n - (-4)^n) & 2((-4)^n - 2^n) & 2^{n+1} \end{pmatrix}.}$$

On retrouve bien le même résultat qu'avec la méthode 1.

(c) **Étude de trois suites récurrentes :**

i. **Montrons que pour tout $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$, $\mathbf{X_n = A^n X_0}$:**
On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$ le vecteur colonne $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$. D'après la relation de récurrence vérifiée par les suites, on obtient

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_{n+1} = AX_n.}$$

- Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}(n)$: $\quad X_n = A^n X_0$.
- Initialisation : pour $n = 0$:
D'un côté, on a : X_0 et de l'autre côté, on a : $A^0 X_0 = X_0$. Ainsi, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose la propriété vraie à l'ordre n, montrons qu'elle est vraie à l'ordre $n+1$. Par définition des suites, on sait que : $X_{n+1} = AX_n$. Or par hypothèse de récurrence, on sait que : $X_n = A^n X_0$. Ainsi, on a
$$X_{n+1} = A \times A^n X_0 = A^{n+1} X_0.$$
Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
- Conclusion : il résulte du principe de récurrence que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = A^n X_0.}$

ii. **Donnons l'expression explicite de $\mathbf{x_n}$, $\mathbf{y_n}$ et $\mathbf{z_n}$:**
Comme on connaît l'expression de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$, on obtient

$$\boxed{\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} \quad x_n &= \frac{1}{2}\left[(2^n+(-4)^n)x_0+((-4)^n-2^n)y_0+(2^n-(-4)^n)z_0\right] \\ y_n &= \frac{1}{2}\left[(2^n-(-4)^n)x_0+(3(-4)^n-2^n)y_0+(2^n-(-4)^n)z_0\right] \\ z_n &= (2^n-(-4)^n)x_0+((-4)^n-2^n)y_0+2^n z_0. \end{aligned}}$$

iii. **Étude de la convergence des trois suites :**
Si $x_0 = y_0 = 1$ et $z_0 = 2$, les expressions ci-dessus deviennent

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} \quad x_n &= y_n = 2^n \\ z_n &= 2^{n+1}. \end{aligned}$$

Comme $2 > 1$, les trois suites sont divergentes de première espèce et
$\boxed{\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} y_n = \lim_{n\to+\infty} z_n = +\infty.}$

3. **Méthode 3 : en connaissant une relation entre les puissances de la matrice**

(a) **Donnons la relation entre $\mathbf{A^2}$, $\mathbf{A}$ et $\mathbf{I_3}$:**
Le calcul donne $A^2 = \begin{pmatrix} 10 & 6 & -6 \\ -6 & 22 & -6 \\ -12 & 12 & 4 \end{pmatrix}$. En identifiant les coefficients de A^2 avec $aI_3 + bA$ on obtient

$$\boxed{A^2 = 8I_3 - 2A.}$$

(b) **Étudions l'inversibilité de A :**
Une telle relation permet d'obtenir directement l'inversibilité de A. En effet, on a alors

$$A\left(\frac{A+2I_3}{8}\right) = I_3.$$

Ainsi, par définition d'une matrice inversible, A est inversible et $\boxed{A^{-1} = \frac{A+2I_3}{8} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}}$.

On retrouve bien le résultat de la première méthode.

(c) **Montrons qu'il existe deux suites $(\mathbf{a_n})_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}}$ et $(\mathbf{b_n})_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}}$ telles que, pour tout entier $\mathbf{n}$: $\mathbf{A^n = a_nA + b_nI_3}$:**

- Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}(n)$: $\quad \exists (a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2,\ A^n = a_nA + b_nI_3$.
- Initialisation : pour $n = 0$:
Comme $A^0 = I_3$, $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$ conviennent. Ainsi, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose la propriété vraie au rang n, montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$. Par hypothèse de récurrence, on sait donc qu'il existe deux nombres réels $(a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$ tels que
$$A^n = a_nA + b_nI_3.$$
Comme $A^{n+1} = A \times A^n$, on obtient en appliquant l'hypothèse de récurrence
$$A^{n+1} = a_nA^2 + b_nA.$$
Il suffit alors d'utiliser la relation : $A^2 = -2A + 8I_3$ entre les puissances de A pour conclure. On obtient alors
$$A^{n+1} = 8a_nI_3 + (-2a_n + b_n)A.$$
On pose alors $a_{n+1} = -2a_n + b_n \in \mathbb{R}$ et $b_{n+1} = 8a_n \in \mathbb{R}$ et ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

- Conclusion : il résulte du principe de récurrence
  $\boxed{\text{qu'il existe deux suites } (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ telles que } \forall n \in \mathbb{N},\ A^n = a_nA + b_nI_3.}$

On connaît de plus la relation de récurrence qui lie ces suites :

$$\boxed{\begin{cases} a_0 = 0 \\ b_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = -2a_n + b_n \\ \qquad\qquad b_{n+1} = 8a_n. \end{cases}}$$

(d) **Donnons l'expression explicite de $\mathbf{a_n}$, $\mathbf{b_n}$ puis celle de $\mathbf{A^n}$:**
On remarque que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre deux. En effet, on a

$$a_0 = 0 \quad a_1 = -2a_0 + b_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+2} = -2a_{n+1} + 8a_n.$$

L'équation caractéristique est alors $r^2 + 2r - 8 = 0$ et le discriminant d'une telle équation est : $\Delta = 36$. Les solutions sont donc -4 et 2. On obtient ainsi

$$\exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \alpha(-4)^n + \beta 2^n.$$

Les conditions initiales permettent de calculer α et β. On doit résoudre le système suivant

$$\begin{cases} \alpha + \beta &= 0 \\ -4\alpha + 2\beta &= 1. \end{cases}$$

On obtient alors $\alpha = -\dfrac{1}{6}$ et $\beta = \dfrac{1}{6}$. On a donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \frac{-(-4)^n + 2^n}{6}.}$$

On en déduit alors l'expression explicite de la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On a

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ b_n = 8a_{n-1} = \frac{2^{n+1} + (-4)^n}{3}.}$$

On obtient alors pour l'expression de A^n :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = \frac{-(-4)^n + 2^n}{6}A + \frac{2^{n+1} + (-4)^n}{3}I_3 = \boxed{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2^n + (-4)^n & (-4)^n - 2^n & 2^n - (-4)^n \\ 2^n - (-4)^n & 3(-4)^n - 2^n & 2^n - (-4)^n \\ 2(2^n - (-4)^n) & 2((-4)^n - 2^n) & 2^{n+1} \end{pmatrix}}.$$

On retrouve bien le même résultat qu'avec les méthodes 1 et 2.

(e) **Calcul de $\mathbf{A^{-n}}$:**
On a vu que $A^{-1} = \dfrac{1}{8}(2I_3 + A)$. On cherche à calculer $(A^{-1})^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme les matrices $2I_3$ et A commutent car la matrice I_3 commute avec toutes les matrices de taille 3, on peut appliquer le binôme de Newton et on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N},\ A^{-n} = \frac{1}{8^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(A)^k(2I_3)^{n-k} = \frac{1}{8^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^{n-k}A^k.$$

En utilisant alors l'expression de A^k trouvée dans la question précédente (qui est bien vraie pour tout

$k \in \mathbb{N}$), on obtient

$$\begin{aligned}
A^{-n} &= \frac{1}{8^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^{n-k}\left[\frac{2^{k+1}+(-4)^k}{3}I_3+\frac{2^k-(-4)^k}{6}A\right] \\
&= \frac{1}{8^n}\left[\frac{1}{6}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^n\right)A-\frac{1}{6}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-4)^k2^{n-k}\right)A\right. \\
&\qquad\qquad \left.+\frac{1}{3}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^{n+1}\right)I_3+\frac{1}{3}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-4)^k2^{n-k}\right)I_3\right] \\
&= \frac{1}{8^n}\left(\frac{2^n2^n}{6}A-\frac{(-2)^n}{6}A+\frac{2^{n+1}2^n}{3}I_3+\frac{(-2)^n}{3}I_3\right) \\
&= \boxed{\frac{1-(-1)^n}{6\times 2^n}A+\frac{2^{n+1}-(-1)^n}{3\times 4^n}I_3.}
\end{aligned}$$