Programme de colle : Semaine 12
Lundi 18 décembre

I Cours

1. Matrices
   (a) Définition de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)
   (b) Matrice identité, matrice diagonale, matrice triangulaire.
   (c) Sommes et produits de matrices. Transposition.
   (d) Matrices qui commutent : identité remarquables et binôme de Newton
   (e) Inversibilité, algorithme du pivot de Gauss sur la "matrice augmentée"
   (f) Cas des matrices de taille 2 : $\det(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = ad - bc$. Formule d'inversion.
   (g) Lien avec les systèmes linéaires −> Rang d'une matrice (défini comme le rang du système $AX = 0$). Calcul du rang avec le pivot de Gauss directement sur la matrice.
   (h) Théorème : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on a les équivalences suivantes :
      i. A est inversible.
      ii. $rg(A) = n$
      iii. Le système $AX = Y$ est de Cramer
2. Informatique
   (a) Parcours de listes.
   (b) Tri par insertion.

II Exercices Types

Exercice 1. On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Calculer, lorsque cela est possible, $A + B$, AB, BA, A^2, AC, $B^T A^T$, CA, C^2, $(C - 2I_3)^3$, XB et $X^T C$.

Exercice 2. Calculer l'inverse de $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 3. Soient les deux matrices suivantes : $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer B^3. B est-elle inversible ?
2. Calculer les puissances n-ièmes de C. (Par exemple en utilisant le Binôme de Newton)

Exercice 4. On considère la matrice

$$N = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer N^2. Déterminer a, b tel que $N^2 = aN + bI$. N est-elle inversible ? Si oui, donner son inverse.

2. Montrer qu'il existe deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ N^n = u_n N + v_n I.$$

3. En déduire u_n et v_n en fonction de n. Puis donner l'expression de N^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites de réels telles que $x_0 = y_0 = 1$ et $z_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_{n+1} & = & 2x_n - 2y_n + z_n \\ y_{n+1} & = & 2x_n - 3y_n + 2z_n \\ z_{n+1} & = & -x_n + 2y_n. \end{array}\right.$$

Calculer x_n, y_n et z_n en fonction de n.

Exercice 5. Application : soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que P est inversible et calculer P^{-1}.
2. Calculer $P^{-1}MP$
3. Étudier l'inversibilité de M.
4. Calculer M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.