Correction - DS 4

Exercice 1. 1. (a) Déterminer $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\frac{x^2}{1+x^2} = \frac{a}{1+x^2} + b$

(b) A l'aide d'une intégration par partie, déterminer une primitive de $x \mapsto 2x\text{Arctan}(x)$

2. Résoudre l'équation différentielle suivante sur $]0,+\infty[$

$$y' + \frac{1}{x}y = 2\text{Arctan}(x)$$

Correction 1.

1. (a)

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{1+x^2} &= \frac{1+x^2-1}{1+x^2} \\ &= \frac{1+x^2}{1+x^2} + \frac{-1}{1+x^2} \\ &= 1 + \frac{-1}{1+x^2}\end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{a=-1, b=1}$$

(b) $F(x) = \int_0^x 2t\text{Arctan}(t)dt$ est une primitive de $x \mapsto 2x\text{Arctan}(x)$. On a par intégration par parties :

$$\begin{aligned}F(x) &= [t^2\arctan(t)]_0^x - \int_0^x t^2 \frac{1}{1+t^2}dt \\ &= x^2\arctan(x) - \int_0^x 1 - \frac{1}{1+t^2}dt \quad \text{(Question 1a)} \\ &= x^2\arctan(x) - x + \arctan(x)\end{aligned}$$

$$\boxed{x \mapsto x^2\arctan(x) - x + \arctan(x) \text{ est une primitive de } x \mapsto 2x\text{Arctan}(x)}$$

2. On résout tout d'abord l'équation homogène associée :

$$y' + \frac{1}{x}y = 0 \quad (EH)$$

dont solutions sont

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{EH} &= \{x \mapsto Ce^{-\ln(x)} \,|\, C \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x \mapsto C\frac{1}{x} \,|\, C \in \mathbb{R}\}\end{aligned}$$

Puis on cherche une solution particulière de $y' + \frac{1}{x}y = 2\text{Arctan}(x)$, à l'aide de la méthode de la variation de la constante. On cherche la solution de la forme $y_p(x) = C(x)\frac{1}{x}$ où C est une fonction dérivable à déterminer. Cette fonction est solution si et seulement si

$$C'(x)\frac{1}{x} + C(x)\frac{-1}{x^2} + \frac{C(x)}{x}\frac{1}{x} = 2\arctan(x)$$

ce qui donne
$$C'(x) = 2x\arctan(x)$$
D'après la question 1, $C(x) = x^2\arctan(x) - x + \arctan(x)$ Et une solution particulière est
$$y_p(x) = x\arctan(x) - 1 + \frac{\arctan(x)}{x}$$
Ainsi les solutions de $y' + \frac{1}{x}y = 2\text{Arctan}(x)$ sont
$$\mathcal{S}_E = \{x \mapsto x\arctan(x) - 1 + \frac{\arctan(x)}{x} + C\frac{1}{x} \,|\, C \in \mathbb{R}\}$$

Exercice 2. On cherche à résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle :
$$x^2y'' - 3xy' + 4y = 0 \quad (E)$$

1. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ montrer que les fonctions de la forme $y(x) = ax^2 + bx^2\ln(x)$ sont solutions de E. (On mettra en valeurs les calculs de y' et y'')
2. Réciproquement on considère y une solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ et on cherche à montrer qu'elles sont bien de la forme précédente. Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $z(t) = y\left(e^t\right)$.
   (a) Calculer pour $t \in \mathbb{R}, z'(t)$ et $z''(t)$ en fonction de y et ses dérivées.
   (b) En déduire que z vérifie
   $$z'' - 4z' + 4z = 0.$$
   (c) Résoudre l'équation différentielle trouvée à la question précédente.
   (d) Conclure

Correction 2.

1. Dérivons deux fois la fonction $y(x) = ax^2 + bx^2\ln(x)$:
$$\begin{aligned} y'(x) &= 2ax + 2bx\ln(x) + bx^2\frac{1}{x} \\ &= 2ax + 2bx\ln(x) + bx \\ &= (2a + b)x + 2bx\ln(x) \end{aligned}$$
Puis
$$\begin{aligned} y''(x) &= (2a + b) + 2b\ln(x) + 2bx\frac{1}{x} \\ &= (2a + 3b) + 2b\ln(x) \end{aligned}$$
On a donc
$$\begin{aligned} x^2y'' - 3xy' + 4y &= x^2\Big((2a + 3b) + 2b\ln(x)\Big) - 3x\Big((2a + b)x + 2bx\ln(x)\Big) + 4\Big(ax^2 + bx^2\ln(x)\Big) \\ &= \Big((2a + 3b)x^2 + 2bx^2\ln(x)\Big) - \Big((6a + 3b)x^2 + 6bx^2\ln(x)\Big) + \Big(4ax^2 + 4bx^2\ln(x)\Big) \\ &= (2a + 3b - 6a - 3b + 4a)x^2 + (2b - 6b + 4b)x^2\ln(x) \\ &= 0 \end{aligned}$$
Ainsi y est bien solution de (E)
2. (a) $z'(t) = e^ty'(e^t)$ et $z''(t) = e^ty'(e^t) + e^{2t}y''(e^t)$

(b)

$$\begin{aligned} z''(t) - 4z'(t) + 4z(t) &= e^t y'(e^t) + e^{2t} y''(e^t) - 4e^t y'(e^t) + 4y(e^t) \\ &= (e^t)^2 y''(e^t) - 3e^t y'(e^t) + 4y(e^t) \end{aligned}$$

Or pour tout $x > 0$ il existe t tel que $x = e^t$ et on a alors

$$(e^t)^2 y''(e^t) - 3e^t y'(e^t) + 4y(e^t) = x^2 y''(x) - 3xy'(x) + 4y(x)$$

Comme y est solution de (E) on a donc $x^2 y''(x) - 3xy'(x) + 4y(x) = 0$ et finalement :

$$\boxed{z'' - 4z' + 4z = 0}$$

(c) Soit $X^2 - 4X + 4 = 0$ l'équation caractéristique de associée à l'équation précédente. Cette équation admet une seule solution, à savoir, 2. Donc les solutions de $z'' - 4z' + 4z = 0$ sont

$$\boxed{\mathcal{S}_z = \{t \mapsto C_1 e^{2t} + C_2 t e^{2t} \,|\, (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2\}}$$

(d) Les solutions de (E) vérifient donc $y(x) = z(ln(x))$ où $z \in \mathcal{S}_z$. Il existe donc $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\begin{aligned} y(x) &= C_1 e^{2ln(x)} + C_2 ln(x) e^{2ln(x)} \\ &= C_1 x^2 + C_2 x^2 \ln(x) \end{aligned}$$

On retrouve bien la forme des solutions de 1.

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } E \text{ est } \mathcal{S} = \{x \mapsto C_1 x^2 + C_2 x^2 \ln(x) \,|\, (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2\}}$$

Exercice 3. 1. Résoudre $e^{-2t} - e^{-t} + \frac{1}{8} > 0$.

2. La concentration d'alcool (en $g.L^{-1}$) dans le sang d'une personne ayant absorbé, à jeun, une quantité Q d'alcool vérifie l'équation différentielle :

$$y'(t) + y(t) = \frac{Q}{6} e^{-2t} \quad (E)$$

où t est le temps écoulé après ingestion exprimé en heures.
On suppose qu'une personne ingère la quantité $Q = 24g$ d'alcool. Exprimer en heure le temps qu'il faut pour que la personne possède un taux d'alcoolémie inférieur à $0.5gL^{-1}$. (Afin de résoudre l'équation différentielle (E), on pourra chercher une solution particulière de la forme $y_p(t) = \lambda e^{-2t}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ est à déterminer)
On proposera un calcul littéral puis une application numérique.

Correction 3.

1. On pose $X = e^{-t}$. t est solution de$e^{-2t} - e^{-t} + \frac{1}{8} > 0 \iff X$ est solution de $X^2 - X + \frac{1}{8}$
On résout $X^2 - X + \frac{1}{8}$ à l'aide du discriminant : $\Delta = 1 - 4\frac{1}{8} = \frac{1}{2}$ On obtient deux racines réelles :

$$X_1 = \frac{1 - \sqrt{\frac{1}{2}}}{2} \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{1 + \sqrt{\frac{1}{2}}}{2}$$

Qui se simplifient en

$$X_1 = \frac{2 - \sqrt{2}}{4} \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$$

Ainsi les solutions de l'inéquation sont :

$$\boxed{\mathcal{S} =]-\infty, X_1[\cup]X_2, +\infty[}$$

Donc t est solution de

$$e^{-2t} - e^{-t} + \frac{1}{8} > 0 \Longleftrightarrow e^{-t} \in]-\infty, X_1[\cup]X_2, +\infty[$$

Comme l'exponentielle est toujours positive cela équivaut à

$$e^{-t} \in]0, X_1[\cup]X_2, +\infty[$$

ce qui donne $-t \in]-\infty, \ln(X_1)[\cup]\ln(X_2), +\infty[$ et *in fine*

$$\boxed{t \in]-\infty, -\ln(X_2)[\cup]-\ln(X_1), \infty[}$$

2. Soit (EH) l'équation homogène associée :

$$y'(t) + y(t) = 0$$

dont les solutions sont $y(t) = Ce^{-t}$, $C \in \mathbb{R}$
On cherche ensuite une solution particulière de la forme $y_p(t) = \lambda e^{-2t}$

$$y_p \text{ est solution de (E) si et seulement si } -2\lambda e^{-2t} + \lambda e^{-2t} = 4e^{-2t}$$

On obtient

$$\lambda = -4$$

Ainsi, les solutions de (E) sont de la forme :

$$y(t) = Ce^{-t} - 4e^{-2t}$$

On a supposé que la personne était à jeun au temps 0 donc $y(0) = 0$, on obtient ainsi que $C = 4$
Finalement la concentration d'alcool dans le sang de l'individu est donnée par la fonction

$$y(t) = 4(e^{-t} - e^{-2t})$$

On cherche désormais le temps t_0 tel que $y(t_0) < 0.5$. On est donc amené à résoudre l'inéquation

$$4(e^{-t} - e^{-2t}) < 0.5$$

C'est-à-dire

$$e^{-2t} - e^{-t} + \frac{1}{8} > 0$$

qui d'après la question 1 admet comme solution

$$\mathcal{S} =]-\infty, -\ln(X_2)[\cup]-\ln(X_1), \infty[$$

Ainsi on obtient $t_0 = -\ln(X_1) \simeq 1.9$

$$\boxed{\text{L'individu aura un taux d'alcoolémie inféiruer à } 0.5g.L^{-1} \text{ après environ 2h}}$$

□

Exercice 4 (Agro 2016)**.** On considère la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k}.$$

1. Écrire une fonction Python `suiteS` qui prend en argument un entier `n` et retourne la valeur de S_n.
2. Dresser le tableau de variations de la fonction $f : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$. (On inclura les limites aux bords de l'ensemble de définition)
3. En déduire que, pour tout entier k supérieur ou égal à 4 , on a :
$$\int_k^{k+1} \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x \leq \frac{\ln(k)}{k}$$
4. En déduire l'existence de deux réels (A, B) tel que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$:
$$\frac{\ln^2(n+1)}{2} - A \leq S_n + B$$
5. En déduire la limite de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Correction 4.

1. (a) f est définie est dérivable sur $D_f = \mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x \in D_f$
$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}x - \ln(x)}{x^2} = \frac{1-\ln(x)}{x^2}$$
Ainsi
$$f'(x) \geq 0 \iff 1 - \ln(x) \geq 0 \iff \ln(x) \leq 1 \iff x \leq e$$

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

(b) Pour tout entier $k \geq e$ (donc $k \geq 3$) et pour tout $x \in [k, k+1]$ on a par décroissance de f :
$$f(x) \geq f(k)$$
D'où en intégrant entre k et $k+1$, par positivité de l'intégrale :
$$\int_k^{k+1} f(x)dx \leq \int_k^{k+1} f(k)dx$$
et $\int_k^{k+1} f(k)dx = f(k)$ Donc
$$\int_k^{k+1} f(x)dx \leq f(k)$$
De même tout entier k tel que $k-1 \geq e$ (donc $k \geq 4$) et pour tout $x \in [k-1, k]$ on a par décroissance de f :
$$f(x) \leq f(k)$$
D'où en intégrant entre $k-1$ et k, par positivité de l'intégrale :
$$\int_{k-1}^{k} f(x)dx \leq \int_{k-1}^{k} f(k)dx$$

or $\int_{k-1}^{k} +f(k)dx = f(k)$ Donc

$$\int_{k}^{k+1} f(x)dx \leq f(k)$$

D'où pour tout $x \geq 4$:

$$\boxed{\int_{k}^{k+1} \frac{\ln(x)}{x}\ \mathrm{d}x \leq \frac{\ln(k)}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{\ln(x)}{x}\ \mathrm{d}x}$$

(c) On va sommer les inégalités précédentes pour k entre 4 et n. Remarquons qu'en utilisant la relation de Chasles on obtient

$$\sum_{k=4}^{n} \int_{k}^{k+1} \frac{\ln(x)}{x}dx = \int_{4}^{n+1} \frac{\ln(x)}{x}dx \quad \text{et} \quad \sum_{k=4}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{\ln(x)}{x}dx = \int_{3}^{n} \frac{\ln(x)}{x}dx$$

On obtient donc

$$\int_{4}^{n+1} \frac{\ln(x)}{x}dx \leq \sum_{k=4}^{n} \frac{\ln(k)}{k} \leq \int_{3}^{n} \frac{\ln(x)}{x}dx$$

Or, on a

$$\begin{aligned}\int_{4}^{n+1} \frac{\ln(x)}{x} &= [\frac{1}{2}\ln^2(x)]_4^{n+1} \\ &= \frac{1}{2}\ln^2(n+1) - \frac{1}{2}\ln^2(4) \\ &= \frac{1}{2}\ln^2(n+1) - 2\ln^2(2)\end{aligned}$$

et

$$\sum_{k=4}^{n} \frac{\ln(k)}{k} = S_n - \frac{\ln(3)}{3} - \frac{\ln(2)}{2}$$

et enfin

$$\begin{aligned}\int_{3}^{n} \frac{\ln(x)}{x} &= [\frac{1}{2}\ln^2(x)]_3^{n} \\ &= \frac{1}{2}\ln^2(n) - \frac{1}{2}\ln^2(3)\end{aligned}$$

On peut donc prendre $A = 2\ln^2(2)$, $B = \frac{\ln(3)}{3} + \frac{\ln(2)}{2}$ et $C = \frac{1}{2}\ln^2(3)$ et on obtient

$$\boxed{\frac{\ln^2(n+1)}{2} - A \leq S_n - B \leq \frac{\ln^2(n)}{2} - C.}$$

(d) $n \to \frac{\ln^2(n+1)}{2}$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$. Ainsi par comparaison

$$\boxed{(S_n)_{n\geq 1} \text{ tend vers } +\infty}$$

INFORMATIQUE

Exercice 5. 1. Écrire une fonction `Paire` qui prend en argument une liste d'entiers et qui renvoie la liste dont les nombres pairs sont divisés par 2 et les nombres impaires sont multipliés par 2. Par exemple, la fonction `Paire` appliquée à la liste `[4,1,8,3,5]` renvoie `[2,2,4,6,10]`.

2. Écrire une fonction `PosNeg` qui prend en argument une liste de flottant `L` et qui renvoie deux listes `Pos` et `Neg` contenant respectivement les éléments strictement positifs et strictement négatifs de `L`.

   Par exemple, la fonction `PosNeg` appliquée à la liste `[2.,-3.5,1.,2.45,-1.]` renvoie les listes `[2.,1.,2.45]` et `[-3.5,-1.]`.
3. Écrire une fonction `Intersection` qui prend en argument deux listes d'entiers `L` et `M` et qui renvoie la liste des éléments présents à la fois dans `L` et dans `M`.

   Par exemple, la fonction `Intersection` appliquée aux listes `[2,8,1,5,9]` et `[3,2,6,1,10]` renvoie `[2,1]`.
4. On considère la fonction suivante :

```
def mystere(L, M) :
    K = []
    for i in range(len(L)) :
        if not L[i] in M :
            K.append(L[i])
    return K
```

   Expliquer ce que renvoie cette fonction.

Correction 5.

1.
```
def Paire(L):
    for i in range(len(L)):
        if L[i]%==0:
            L[i]=L[i]//2
        else:
            L[i]=L[i]*2
    return(L)
```

```
def PosNeg(L):
    Pos=[]
    Neg=[]
    for el in L:
        if el>0:
            Pos.append(el)
        else:
            Neg.append(el)
    return(L)
```

3.
```
def intersection(L,M):
    K=[]
    for el in L:
        if el in M:
            K.append(el)
    return(K)
```

4. La fonction mystere renvoie les élèments de `L` qui ne sont pas dans `M`.