Interro 9

Exercice 1. Résoudre le problème de Cauchy suivant

$$y' + y = x$$

avec la condition initiale $y(0) = 1$

Correction 1. On résout tout d'abord l'équation homogéne associée :

$$y' + y = 0 \quad (EH)$$

dont solutions sont

$$\mathcal{S}_{EH} = \{x \mapsto Ce^{-x} \,|\, C \in \mathbb{R}\}$$

Puis on cherche une solution particulière de $y' + y = x$, que l'on suppose de la forme $y_p(x) = ax + b$. Cette fonction est solution si et seulement si

$$a + (ax + b) = x$$

ce qui donne par identification $a + b = 0, a = 1$ d'où $(a, b) = (1, -1)$.

Ainsi les solutions de $y' + y = x$ sont

$$\mathcal{S}_E = \{x \mapsto x - 1 + Ce^{-x} \,|\, C \in \mathbb{R}\}$$

Enfin on détermine l'unique solution du problème de Cauchy à l'aide de la condition initiale. Soit $y(x) = x - 1 + Ce^{-x}$ une solution vérifiant $y(0) = 1$ on a alors $-1 + C = 1$ d'où $C = 2$

Finalement, l'unique solution du problème de Cauchy est

$$\boxed{\{x \mapsto x - 1 + 2e^{-x}\}}$$