TD - 13 Logique

I Raisonnements : implication, équivalence

Exercice 1. Compléter les pointillés par le connecteur logique $\Leftrightarrow$, $\Rightarrow$ ou $\Leftarrow$ en justifiant votre choix.

1. $x \in \mathbb{R}$, $x^2 = 4 \ldots\ldots x = 2$.
2. $z \in \mathbb{C}$, $z = -\overline{z} \ldots\ldots z \in i\mathbb{R}$.
3. $x \in \mathbb{R}$, $x = \dfrac{\pi}{2} \ldots\ldots e^{4ix} = 1$.

Exercice 2. On considère les deux propositions suivantes : A : « m et n sont deux entiers pairs », et B : « $m + n$ est un entier pair ». A-t-on $A \Rightarrow B$? $B \Rightarrow A$? $A \Leftrightarrow B$?

Exercice 3. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Démontrer l'équivalence suivante : $(x^2 + y^2 = 0) \Leftrightarrow (x = 0 \text{ et } y = 0)$.

Exercice 4. Montrer que si x et y sont deux réels qui vérifient $x + y > 2$, alors au moins un des deux est strictement supérieur à 1.

Exercice 5. Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Montrer que la propriété suivante est vraie : $P : \ (\forall \varepsilon > 0,\ x \leq \varepsilon) \Rightarrow x = 0$.

Exercice 6. Montrer les résultats suivants :

1. La composée de deux fonctions impaires est une fonction impaire.
2. La composée d'une fonction paire et d'une fonction impaire est une fonction paire.
3. La somme de deux fonctions impaires est une fonction impaire.
4. Le produit de deux fonctions impaires est une fonction paire.

II Logique et quantificateurs

Exercice 7. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Donner leur négation.

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ x \geq 0$.
2. $\exists y \in \mathbb{R},\ y \geq 0$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \exists y \in \mathbb{R},\ x = y^2$.
4. $\exists y \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}^+,\ x = y^2$.
5. $\exists x \in \mathbb{R}^+,\ \forall y \in \mathbb{R},\ x = y^2$.
6. $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x + y > 0$.
7. $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x + y > 0$.
8. $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x + y > 0$.

Exercice 8. Soit (f, g) deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Écrire à l'aide des quantificateurs les énoncés suivants puis les nier.

1. L'application f est croissante.
2. Il existe un réel positif x tel que $f(x) \geq 0$.
3. La fonction f est paire.
4. La fonction f ne s'annule jamais.
5. La fonction f est inférieure à la fonction g.
6. La fonction f est périodique.

Exercice 9. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Écrire les négations des propositions suivantes :

1. $1 \leq x < y$.
2. $(x^2 = 1) \Longrightarrow x = 1$.
3. $\forall x \in E,\ \forall x' \in E,\ (x \neq x') \Longrightarrow f(x) \neq f(x')$.