CH13 Parenthèse logique

Table des matières

I Logique

I. 1 Notion de proposition

Définition 1. Une propriété est un énoncé mathématique dont on peut dire sans ambiguité s'il est vrai ou faux.

Exemples :

- P_1 : ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. (Vraie)
- $P_2 : 2 < 1$. (Faux)
- $P_3 : \pi$ est un entier. (Faux)
- P_4 : sin est une fonction paire. (Faux)

Ceci correspond aux booléens utilisés en Python : `True` et `False`. Quand on teste une condition, on vérifie si une proposition mathématique est vraie ou fausse.

Une propriété peut dépendre de paramètres[1].
Exemples :

- $P_1(x) : x \geq 1$.
- $P_2(z) : |z| = 1$.
  Evidemment, dans ce cas la véracité d'une proposition dépendra de la variable : $P_1(2)$ est vraie mais $P_1(0)$ est fausse.

I. 2 Opérations sur les propositions

Il existe 3 opérateurs logiques élémentaires qui permettent de créer de nouvelles propriétés.

1. On parle alors parfois de prédicat.

*I. 2. a Opérateur **NON***

Définition 2. Soit P une proposition. La proposition **NON** P, appelée négation de P, est la proposition fausse si P est vraie, et vraie si P est fausse.

⚠ La négation a une vraie valeur logique qui n'est pas forcément la même que la valeur dans le langage français courant de 'opposée' :

Exemples :

- Soit P la proposition : 'La fonction f est croissante'. On a alors NON P : 'la fonction f n'est pas croissante'. En particulier, ceci ne signifie pas 'la fonction f est décroissante'.
- Soit P la proposition : 'Tous les mercredi, il y a DS'. On a alors NON P : 'Il existe au moins un mercredi ou il n'y a pas DS.' En particulier, ceci ne signifie pas 'Les DS n'ont pas lieu le mercredi'.
- NON $(x = 1)$: x différent de 1.
- NON $(x > 0)$: x inférieur ou égal à 0 $(x \leq 0)$.

On verra d'autres exemples une fois que l'on aura vu les quantificateurs.

*I. 2. b Opérateur **OU***

Définition 3. Soient P, Q deux propositions. La proposition P **OU** Q, est la proposition vraie si soit P soit Q est vraie, et fausse sinon.

Exemples :

- (la fonction $\ln$ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$) ou (la fonction $\sin$ est paire) est VRAIE.
- (3<0) ou (π est un entier) est FAUSSE.
- (la fonction $\sin$ est impaire) ou (la fonction $\cos$ est paire) est VRAIE

*I. 2. c Opérateur **ET***

Définition 4. Soient P, Q deux propositions. La proposition P **ET** Q, est la proposition vraie si à la fois P et Q sont vraies, et fausse sinon.

Exemples :

- (la fonction $\ln$ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$) et (la fonction $\sin$ est paire) est FAUSSE.
- (3<0) et (π est un entier) est FAUSSE.
- (la fonction $\sin$ est impaire) et (la fonction $\cos$ est paire) est VRAIE

I. 3 Implication et équivalence

Définition 5. Soient P, Q deux propositions. On définit $'P \Longrightarrow Q'$ par $'(P)Q'$. On dit que P implique Q.

Heuristiquement ceci correspond à dire que P 'est plus forte que' Q : Si P est vraie alors nécessairement Q est vraie. En revanche si P est fausse on ne peut rien dire sur Q. A partir d'un postulat faux on peut arriver à tout et n'importe quoi !

De manière pratique, pour prouver une implication on s'intéressera seulement au cas où P est vraie.

Remarque : La relation d'implication est transitive : Soient P, Q, R trois propositions. Si $P \Longrightarrow Q$ et $Q \Longrightarrow R$ alors $P \Longrightarrow R$.

Exemples :

- $(x \in \mathbb{R}) \Longrightarrow (x^2 > 0)$ est fausse.
- $(x = y) \Longrightarrow (x^2 = y^2)$ est vraie.

Définition 6. Soient P, Q deux propositions. On définit $'P \Longleftrightarrow Q'$ par $'P \Longrightarrow QQ \Longrightarrow P'$. On dit que P équivaut à Q.

Dans ce cas, P est vraie si et seulement si Q est vraie.

I. 4 Opérations sur les propositions

Proposition 7. Avec les opérateurs et :

- $(PQ) = (P)(Q)$
- $(PQ) = (P)(Q)$
- $P(QR) = (PQ)(PR)$
- $P(QR) = (PQ)(PR)$

Remarque : On dit que leest distributif sur leet que leest distributif sur le.

Exemples : Donner la négation de l'affirmation « Fromage OU Dessert ».

Pas de fromage ET pas de dessert !

Par contre si on vous propose « Fromage OU Dessert ». et que vous répondez 'Oui', vous pourrez normalement (si la personne accepte la logique formelle....) mangez aussi bien du fromage que du dessert. On dit que le 'OU' mathématique est inclusif contrairement au 'ou' francais qui est exclusif.

Proposition 8. Avec l'opérateur $\Longrightarrow$:

- $'P \Longrightarrow Q' = '(Q) \Longrightarrow (P)'$ (C'est la base de la contraposée cf plus loin)
- $'\ (P \Longrightarrow Q)' = 'P(Q)'$ (C'est la base du raisonnement par l'absurde)

II Méthodologie

On s'intéresse ici aux différentes méthodes pour prouver que $P \Longrightarrow Q$. En règle générale pour prouver que $P \Longleftrightarrow Q$ on prouvera que $P \Longrightarrow Q$ et $Q \Longrightarrow P$, appliquant deux fois les techniques sous-mentionées. On pourra tout de même parfois se simplifier la tâche et raisonner par équivalences successives ($P \Longleftrightarrow P_1 \Longleftrightarrow \cdots \Longleftrightarrow P_n \Longleftrightarrow Q$). On fera TRES attention de s'assurer que les équivalences écrites sont bien des équivalences et non des implications (tout le monde se fera avoir au moins une fois...). De plus, si l'énoncé demande une implication, on ne s'amusera pas à chercher une équivalence.

II. 1 Méthode directe

Schéma de preuve :

- On part d'une proposition P.
- On écrit une série d'implications.
- On obtient Q.

Exemples :

- Montrer que pour tout entier n, $\left(n \geq 2 \Rightarrow n + \frac{1}{n} \geq 2\right)$.
- Si $n \in \mathbb{N}$ est impair alors n^2 est impair.

II. 2 Contraposée

On utilise la Proposition 8. Au lieu de prouver $P \Longrightarrow Q$ on prouve $(P) \Longrightarrow (Q)$ qui lui est équivalent.

Schéma de preuve :

- On part de la proposition (Q).
- On écrit une série d'implications.
- On obtient (P).

Exemples :

- Si $x^3 = 2$ alors $x < 2$.
- Si $n^2 \in \mathbb{N}$ est pair alors n est pair.

II. 3 Absurde

On utilise la Proposition 8. Au lieu de prouver $P \Longrightarrow Q$ on prouve que $P(Q)$ est fausse.

Schéma de preuve :

- On part de la proposition $P(Q)$.
- On écrit une série d'implications.
- On obtient quelque chose de faux.

Justifions cela proprement. Soit A la proposition $P(Q)$ et B la proposition de conclusion qui est fausse. Par transitivité de l'implication, le schéma de preuve dit que $(A \Longrightarrow B)$ est vraie. C'est à dire $((A)B)$ est vraie. Or comme B est fausse, $((A)B)$ est vraie si et seulement si (A) est vraie, donc A est fausse.

Dire que $(P(Q))$ est fausse, équivaut à $(P)Q$ est vraie, c'est-à-dire $P \Longrightarrow Q$ (ouf!)

Exemples :

- (Le grand classique) $\sqrt{2}$ est irrationel.
- Si $x \in \mathbb{N}$ est entier alors $x + \dfrac{1}{2}$ n'est pas entier.

II. 4 Récurence

- **On définit clairement la propriété à démontrer :**
  Montrons par récurrence sur l'entier $n \geq n_0$, la propriété $\mathcal{P}(n)$: ......
- **Initialisation :** pour $n = n_0$:
  On vérifie que $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie.
- **Hérédité :**
  Soit $n \geq n_0$ fixé. On suppose la propriété vraie à l'ordre n. Montrons qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
  ⚠ N'oubliez pas de signaler l'endroit où vous utilisez l'hypothèse de récurrence.
- **Conclusion :**
  Il résulte du principe de récurrence que pour tout $n \geq n_0$, $\mathcal{P}(n)$.

Exemples : Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

⚠ Vous verrez des récurrences toutes l'année et l'année prochaine. Sachez les faire correctement ! Dans quasiment tous les sujets de concours, il y aura (au moins) une récurrence.

III Quantificateurs

III. 1 *Définition et usage*

Définition 9. Soit E un ensemble et $P(x)$ une propriété.

- $\forall$ se lit 'quelque soit' Si $P(x)$ est vraie pour tout $x \in E$, on écrit : $\forall x \in E,\ P(x)$
- $\exists$ se lit 'il existe' Si $P(x)$ est vraie pour au moins un $x \in E$, on écrit : $\exists x \in E,\ P(x)$
- $\exists!$ se lit 'il existe un unique' Si $P(x)$ est vraie pour un unique élément $x \in E$, on écrit : $\exists! x \in E,\ P(x)$

Toutes les variables[2] doivent être quantifiées.

En Python, toute variable doit être définie avant d'être utilisée, sauf les variables 'muettes' celle que l'on utilise dans les boucles.

```
n=10 #variable definie
for i in range(n): #i n'a pas besoin d'etre definie ici, mais n si
  print(i)
```

On quantifie les variables avant de les considérer dans les propositions. On écrit donc $\forall x \in E, P(x)$ et NON PAS $P(x), \forall x \in E$

Exemples :

- $\forall \epsilon > 0,\ \exists N_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}_0, n \geq N \Longrightarrow |u_n - 1| \leq \epsilon.$
- Rappelons $P_1(x) : x \geq 1$. On a $'\exists x \in \mathbb{R}, P_1(x)'$ est vraie mais $'\forall x \in \mathbb{R}, P_1(x)'$ est fausse.

L'ordre des quantificateurs est important. Plus précisément :
Si ils sont de nature différente, leur ordre est important et on ne peut pas modifier cet ordre :

Exemple :

- P : $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ y > x$: est Vraie.
- Q : $\exists y \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ y > x$: est Fausse

- $\exists N_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}, \forall \epsilon > 0,\ n \geq N_0 \Longrightarrow |u_n - 1| \leq \epsilon.$

Mais si ils sont de mêmes natures l'ordre n'est pas important :

- $\forall x \in E,\ \forall x' \in E',\ P(x, x') \Longleftrightarrow \forall x' \in E',\ \forall x \in E,\ P(x, x')$
- $\exists x \in E,\ \exists x' \in E',\ P(x, x') \Longleftrightarrow \exists x' \in E',\ \exists x \in E,\ P(x, x').$
- $\exists! x \in E,\ \exists! x' \in E',\ P(x, x') \Longleftrightarrow \exists! x' \in E',\ \exists! x \in E,\ P(x, x').$

Les quantificateurs ne peuvent pas être interchangés.

Exemples :

- $\exists \epsilon > 0,\ \exists N_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}_0, n \geq N \Longrightarrow |u_n - 1| \leq \epsilon.$
- $\forall \epsilon > 0,\ \forall N_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}_0, n \geq N \Longrightarrow |u_n - 1| \leq \epsilon.$
- $\forall \epsilon > 0,\ \exists N_0 \in \mathbb{N},\ \exists n \in \mathbb{N}_0, n \geq N \Longrightarrow |u_n - 1| \leq \epsilon.$
- $\exists \epsilon > 0,\ \exists N_0 \in \mathbb{N},\ \exists n \in \mathbb{N}_0, n \geq N \Longrightarrow |u_n - 1| \leq \epsilon.$

2. Sauf les variables 'muettes' celles se trouvant au sein d'une focntion mathématique telles que $\sum_{k=0}^{n}$ (ici k est muet mais pas n) ou $\lim_{x \to 0} f(x)$ (ici x est muet.) Ces variables sont 'muettes' car elles n'ont pas de valeurs bien définies, et ne servent qu'à l'utilisation du symbole mathématiques sous-jacent.

ON N'UTILISERA PAS LES QUANTIFICATEURS A LA PLACE DU FRANCAIS. Tirer du programme officiel : « L'usage des quantificateurs hors des énoncés mathématiques est à proscrire. » Cette mise en garde s'applique aussi pour les opérateurs $\Longrightarrow$ et $\Longleftrightarrow$.

III. 2 Négation et quantificateurs

Comme on est amené parfois à considérer des négations de propositions il est nécessaire de savoir obtenir la négation d'une proposition contenant des quantificateurs.

Heureusement c'est assez simple : la négation d'un 'pour tout' est 'il existe', et vice-versa, la négation d'un 'il existe' est 'pour tout'.

$$(\forall x \in E,\ P(x)) = \exists x \in E,\ NON(P(x))$$
$$(\exists x \in E,\ P(x)) = \forall x \in E,\ NON(P(x))$$

Exemples :

- $\Big(\forall x \in \mathbb{R},\ \exp(x) > 0\Big) = \exists x \in \mathbb{R}, \exp(x) \leq 0$
- $\Big(\forall t \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq t\Big) = \exists t \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq t$
- $\Big(\exists t \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{N}^*, \cos(n) = t\Big) = \forall t \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \cos(n) \neq t$

Mais parfois c'est tout de même un peu subtil :

Exemples :

- $\Big(\forall \epsilon > 0,\ \exists N_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}_0, n \geq N \Longrightarrow |u_n - 1| \leq \epsilon.\Big) = \exists \epsilon > 0,\ \forall N_0 \in \mathbb{N},\ \exists n \in \mathbb{N}_0, n \geq N_0 |u_n - 1| \geq \epsilon.\ )$