

Correction TD - 15 : Vocabulaire des applications

I Image directe

Correction 1.

1. Étude de la fonction f :

f est définie et dérivable sur \mathbb{R} comme fonction polynômiale.

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 3(x^2 - 1).$$

| | | | | |
|---------|-----------|------|------|-----------|
| x | $-\infty$ | -1 | 1 | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | $+$ | 0 | $-$ | $+$ |
| f | $-\infty$ | 2 | -2 | $+\infty$ |

Les limites en l'infini s'obtiennent en utilisant le théorème du monôme de plus haut degré.

2. Déterminons $f([1, 2])$, $f(\mathbb{R})$, $f([-1, +\infty[)$:

La recherche d'images directes se fait le plus souvent en utilisant le théorème de la bijection.

(a) Déterminons $f([1, 2])$.

On peut par exemple utiliser le théorème de la bijection.

- f est continue sur $[1, 2]$.
- f est strictement croissante sur $[1, 2]$.
- $f(1) = -2$ et $f(2) = 2$.

Ainsi, par le théorème de la bijection, f réalise une bijection de $[1, 2]$ sur $[-2, 2]$ et donc

$$\boxed{f([1, 2]) = [-2, 2]}.$$

- (b) Il faut ici appliquer le théorème de la bijection sur chaque intervalle où f est strictement monotone, à savoir sur les intervalles $]-\infty, -1]$, $[-1, 1]$ et $[1, +\infty[$. On montre ainsi que $\boxed{f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}}$ et en particulier cela nous donne que la fonction f est surjective de \mathbb{R} sur \mathbb{R} .
- (c) Là encore, en appliquant le théorème de la bijection sur les deux intervalles suivants $[-1, 1]$ et $[1, +\infty[$ où la fonction f est strictement monotone, on obtient $\boxed{f([-1, +\infty[) = [-2, +\infty[}$.

Correction 2.

1. Déterminons $f([-1, 2])$

- Calcul de $f([-1, 2])$:

On applique le théorème de la bijection sur $[-1, 0]$ et sur $[0, 2]$. On a

- ★ La fonction carrée est continue sur $[-1, 0]$ comme fonction usuelle.
- ★ La fonction carrée est strictement décroissante sur $[-1, 0]$.
- ★ $f(-1) = 1$ et $f(0) = 0$.

Ainsi d'après le théorème de la bijection, on a en particulier que $f([-1, 0]) = [0, 1]$.

- ★ La fonction carrée est continue sur $[0, 2]$ comme fonction usuelle.
- ★ La fonction carrée est strictement décroissante sur $[0, 2]$.
- ★ $f(2) = 4$ et $f(0) = 0$.

Ainsi d'après le théorème de la bijection, on a en particulier que $f([0, 2]) = [0, 4]$.

Ainsi on a : $f([-1, 2]) = f([-1, 0]) \cup f([0, 2]) = [0, 4]$. Donc $f([-1, 2]) = [0, 4]$.

2. Déterminons $\sin\left(\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]\right)$, $\tan\left(\left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]\right)$ et $\cos\left(\left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}\right]\right)$:

- Calcul de $\sin\left(\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]\right)$:

On applique le théorème de la bijection sur $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$:

- ★ La fonction sinus est continue sur $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ comme fonction usuelle.
- ★ La fonction sinus est strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$.
- ★ $f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

Ainsi d'après le théorème de la bijection, on a en particulier que $\sin\left(\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]\right) = \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right]$.

- Calcul de $\tan\left(\left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]\right)$:

On applique le théorème de la bijection sur $\left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$:

- ★ La fonction tangente est continue sur $\left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ comme fonction usuelle.
- ★ La fonction tangente est strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$.
- ★ $f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$ et $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = +\infty$.

Ainsi d'après le théorème de la bijection, on a en particulier que $\tan\left(\left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]\right) =]-1, +\infty[$.

- Calcul de $\cos\left(\left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}\right]\right)$:

On applique le théorème de la bijection sur $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}\right]$:

- ★ La fonction cosinus est continue sur $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}\right]$ comme fonction usuelle.
- ★ La fonction cosinus est strictement décroissante sur $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}\right]$.
- ★ $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ainsi d'après le théorème de la bijection, on a en particulier que $\cos\left(\left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}\right]\right) = \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

Correction 3.

1. (a) **Calcul de $f(A)$ avec $A = \{z \in \mathbb{C}, \exists x \in \mathbb{R}, z = x + 2i\}$:**

Par définition d'une image directe par une application, on sait que $f(A) = \{y \in \mathbb{R}^+, \exists z \in A, y = f(z)\}$. Et par définition de l'application f , on obtient que : $f(A) = \{y \in \mathbb{R}^+, \exists z \in A, y = |z|\}$. Puis par définition de l'ensemble A , on a : $f(A) = \{y \in \mathbb{R}^+, \exists x \in \mathbb{R}, y = |x + 2i|\} = \{y \in \mathbb{R}^+, \exists x \in \mathbb{R}, y = \sqrt{x^2 + 4}\} = \{\sqrt{x^2 + 4}, x \in \mathbb{R}\} = [2, +\infty[$. Il suffit en effet d'étudier la fonction $g : x \mapsto \sqrt{x^2 + 4}$ pour obtenir que $g(\mathbb{R}) = [2, +\infty[$.

- (b) **Calcul de $f(A)$ avec $A = \{z \in \mathbb{C}, \exists x \in \mathbb{R}, z = (1 + \cos(x)) + i \sin(x)\}$:**

Par définition d'une image directe par une application, on sait que $f(A) = \{y \in \mathbb{R}^+, \exists z \in A, y = f(z)\}$. Et par définition de l'application f , on obtient que : $f(A) = \{y \in \mathbb{R}^+, \exists z \in A, y = |z|\}$. Puis par définition de l'ensemble A , on a :

$$\begin{aligned} f(A) &= \{y \in \mathbb{R}^+, \exists x \in \mathbb{R}, y = |1 + \cos x + i \sin x|\} = \left\{y \in \mathbb{R}^+, \exists x \in \mathbb{R}, y = \sqrt{(1 + \cos x)^2 + \sin^2 x}\right\} \\ &= \left\{y \in \mathbb{R}^+, \exists x \in \mathbb{R}, y = \sqrt{4 \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}\right\} = \left\{y \in \mathbb{R}^+, \exists x \in \mathbb{R}, y = 2 \left|\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right|\right\} = [0, 2] \end{aligned}$$

car $\left|\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right|$ prend toutes les valeurs possibles entre 0 et 1 car $f(A) = [0, 2]$.

2. (a) **Calcul de $f^{-1}(B)$ avec $B = [-1, 1]$:**

Par définition de l'image réciproque d'une application, on cherche $z \in \mathbb{C}$ tel que :

$$f(z) \in B \Leftrightarrow |z| \in [-1, 1] \Leftrightarrow -1 \leq |z| \leq 1.$$

La première inégalité étant toujours vraie, on a $f^{-1}(B) = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1\}$: l'ensemble $f^{-1}(B)$ est donc le disque

- (b) **Calcul de $f^{-1}(B)$ avec $B = \mathbb{R}_+^*$:**

Par définition de l'image réciproque d'une application, on cherche $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > 0$, ce qui correspond aux complexes non nuls. Ainsi $f^{-1}(B) = \mathbb{C}^*$.

II Injection, surjection, bijection sur des exemples concrets

Correction 4. Commencer par tracer les graphes des courbes pour conjecturer les résultats.

1. **Étude de l'injectivité, surjectivité, bijectivité de la fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{x} \end{cases}$:**

La fonction f est strictement croissante sur \mathbb{R}^+ , donc f est injective. On a $f(x) = -1 \Leftrightarrow \sqrt{x} = -1$ qui n'a pas de solution, donc f n'est pas surjective, et donc f n'est pas bijective.

2. **Étude de l'injectivité, surjectivité, bijectivité de la fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto \sqrt{x} \end{cases}$:**

On peut ici conjecturer que f est bijective. Comme on doit calculer la bijection réciproque, on raisonne par analyse-synthèse :

- Analyse : soit $y \in \mathbb{R}^+$, on résout $f(x) = y$ pour $x \in \mathbb{R}^+$. On a :

$$f(x) = y \Leftrightarrow \sqrt{x} = y \Leftrightarrow x = y^2,$$

car on a $y \geq 0$.

- Synthèse : $\forall y \in \mathbb{R}^+$, l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution $x = y^2$ dans \mathbb{R}^+ . Ainsi f est bijective de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R}^+ , et on a $f^{-1} : \begin{cases} \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ y \mapsto y^2 \end{cases}$.

3. **Étude de l'injectivité, surjectivité, bijectivité de la fonction f :** $\begin{cases} \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto x + 1 \end{cases}$:

La fonction f est strictement croissante, donc f est injective. On a $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$. Or $-1 < 0$, donc $f(x) = 0$ n'a pas de solution de \mathbb{R}^+ , donc f n'est pas surjective. Donc f n'est pas bijective.

4. **Étude de l'injectivité, surjectivité, bijectivité de la fonction f :** $\begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x + 1 \end{cases}$:

On raisonne par analyse-synthèse :

- Analyse : soit $y \in \mathbb{R}$, on résout $f(x) = y$ pour $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$f(x) = y \Leftrightarrow x + 1 = y \Leftrightarrow x = y - 1,$$

car on a $y \geq 0$.

- Synthèse : $\forall y \in \mathbb{R}$, l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution $x = y - 1$ dans \mathbb{R} . Ainsi f est bijective

de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , et on a $f^{-1} : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ y \mapsto y - 1 \end{cases}$.

5. **Étude de l'injectivité, surjectivité, bijectivité de la fonction f :** $\begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto |x| \end{cases}$:

On a $f(x) = 1 \Leftrightarrow |x| = 1 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -1$, donc 1 admet deux antécédents par f et f n'est pas injective.

On a $f(x) = -1 \Leftrightarrow |x| = -1$ qui n'a pas de solution, donc -1 n'a pas d'antécédent et f n'est pas surjective.

Donc f n'est pas bijective.

6. **Étude de l'injectivité, surjectivité, bijectivité de la fonction f :** $\begin{cases} \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto |x| \end{cases}$:

La fonction f est strictement croissante sur \mathbb{R}^+ , donc f est injective. Mais comme précédemment, -1 n'a pas d'antécédent, donc f n'est pas surjective. Donc f n'est pas bijective.

7. **Étude de l'injectivité, surjectivité, bijectivité de la fonction f :** $\begin{cases} [-1, 1] \rightarrow [0, 1] \\ x \mapsto |x| \end{cases}$:

Comme précédemment, 1 a deux antécédents par f donc f n'est pas injective ($|1| = |-1|$). Donc f n'est pas bijective.

Soit $y \in [0, 1]$: on a $f(x) = y \Leftrightarrow |x| = y \Leftrightarrow x = y$ ou $x = -y$ avec $y \in [-1, 1]$ et $-y \in [-1, 1]$, donc y admet deux antécédents dans $[-1, 1]$, et f est surjective.

8. **Étude de l'injectivité, surjectivité, bijectivité de la fonction f :** $\begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^3 \end{cases}$:

Le théorème de la bijection permet de montrer que f est bijective. On cherche alors la bijection réciproque : soit $y \in \mathbb{R}$, on résout $f(x) = y$ pour $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$f(x) = y \Leftrightarrow x^3 = y \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{y}.$$

On a donc $f^{-1} : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ y \mapsto \sqrt[3]{y} \end{cases}$.

9. **Étude de l'injectivité, surjectivité, bijectivité de la fonction f :** $\begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^4 \end{cases}$:

On a $f(x) = 1 \Leftrightarrow x^4 = 1 \Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 1$, donc f n'est pas injective. On a $f(x) = -1 \Leftrightarrow x^4 = -1$ qui n'a pas de solution, donc f n'est pas surjective. Donc f n'est pas bijective.

10. **Étude de l'injectivité, surjectivité, bijectivité de la fonction f :** $\begin{cases} \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto x^4 \end{cases}$:

Le théorème de la bijection permet de montrer que f est bijective. On cherche alors la bijection réciproque : soit $y \in \mathbb{R}^+$, on résout $f(x) = y$ pour $x \in \mathbb{R}^+$. On a :

$$f(x) = y \Leftrightarrow x^4 = y \Leftrightarrow x = \sqrt[4]{y} \text{ car } x \geq 0.$$

On a donc $f^{-1} : \begin{cases} \mathbb{R}^+ & \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ y & \mapsto \sqrt[4]{y} \end{cases}$.

11. **Étude de l'injectivité, surjectivité, bijectivité de la fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto x^5 \end{cases}$:**

Le théorème de la bijection permet de montrer que f est bijective. On cherche alors la bijection réciproque : soit $y \in \mathbb{R}$, on résout $f(x) = y$ pour $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$f(x) = y \Leftrightarrow x^5 = y \Leftrightarrow x = \sqrt[5]{y}.$$

On a donc $f^{-1} : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ y & \mapsto \sqrt[5]{y} \end{cases}$.

12. **Étude de l'injectivité, surjectivité, bijectivité de la fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto x^n \end{cases}$:**

On distingue les cas n pair et n impair et on applique les mêmes méthodes que dans les questions précédentes.

- Si n pair : on a $x^n = 1 \Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 1$, donc f n'est pas injective. De plus $x^n = -1$ est impossible donc f n'est pas surjective.

En revanche, on peut montrer que f est bijective de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R}^+ et $f^{-1}(y) = \sqrt[n]{y}$.

- Si n impair : le théorème de la bijection permet de montrer que f est bijective de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . On cherche alors la bijection réciproque : soit $y \in \mathbb{R}$, on résout $f(x) = y$ pour $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$f(x) = y \Leftrightarrow x^n = y \Leftrightarrow x = \sqrt[n]{y}.$$

On a donc $f^{-1}(y) = \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ y & \mapsto \sqrt[n]{y} \end{cases}$.

13. **Étude de l'injectivité, surjectivité, bijectivité de la fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow]1, +\infty[\\ x & \mapsto e^{-x} + 1 \end{cases}$:**

On peut commencer par faire un graphe ou l'étude des variations pour se faire une idée du résultat à démontrer. On raisonne ensuite par analyse-synthèse :

- Analyse : soit $y \in]1, +\infty[$, on résout $f(x) = y$ pour $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$f(x) = y \Leftrightarrow e^{-x} + 1 = y \Leftrightarrow x = -\ln(y - 1) \text{ car } y > 1.$$

- Synthèse : $\forall y \in]1, +\infty[$, l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution $x = -\ln(y - 1)$ dans \mathbb{R} . Ainsi

f est bijective de \mathbb{R} dans $]1, +\infty[$, et on a $f^{-1} : \begin{cases}]1, +\infty[& \rightarrow \mathbb{R} \\ y & \mapsto -\ln(y - 1) \end{cases}$.

14. **Étude de l'injectivité, surjectivité, bijectivité de la fonction $f : \begin{cases}]-1, +\infty[& \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \ln(1 + x) \end{cases}$:**

On raisonne par analyse-synthèse :

- Analyse : soit $y \in \mathbb{R}$, on résout $f(x) = y$ pour $x \in]-1, +\infty[$. On a :

$$f(x) = y \Leftrightarrow \ln(1 + x) = y \Leftrightarrow x = e^y - 1.$$

- Synthèse : $\forall y \in]-1, +\infty[$, l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution $x = e^y - 1$, qui est bien dans

$] - 1, +\infty[$ car $e^y > 0$. Ainsi f est bijective de $] - 1, +\infty[$ dans \mathbb{R} , et on a $f^{-1} : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow]-1, +\infty[\\ y & \mapsto e^y - 1 \end{cases}$.

15. **Étude de l'injectivité, surjectivité, bijectivité de la fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow]-4, +\infty[\\ x & \mapsto 2^x - 4 \end{cases}$:**

On raisonne par analyse-synthèse :

- Analyse : soit $y \in]-4, +\infty[$, on résout $f(x) = y$ pour $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$f(x) = y \Leftrightarrow 2^x - 4 = y \Leftrightarrow x = \frac{\ln(y+4)}{\ln 2} \text{ car } y > -4.$$

- Synthèse : $\forall y \in]-4, +\infty[$, l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution $x = \frac{\ln(y+4)}{\ln 2}$ dans \mathbb{R} . Ainsi

$$f \text{ est bijective de } \mathbb{R} \text{ dans }]-4, +\infty[, \text{ et on a } f^{-1} : \begin{cases}]-4, +\infty[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & \frac{\ln(y+4)}{\ln 2} \end{cases}.$$

16. **Étude de l'injectivité, surjectivité, bijectivité de la fonction f :** $\begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \\ x & \mapsto & \cos(x) + \sin(x) \end{cases} :$

La fonction f n'est pas injective ($f(x) = f(x + 2\pi)$), mais f est surjective (transformer $\cos x + \sin x = \sqrt{2} \cos(x - \frac{\pi}{4})$ ou faire une étude de fonction). Donc f n'est pas bijective.

17. **Étude de l'injectivité, surjectivité, bijectivité de la fonction f :** $\begin{cases} \mathbb{Z} & \rightarrow & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & 2n + 1 \end{cases} :$

Soient $(n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $f(n_1) = f(n_2)$. On a alors $2n_1 + 1 = 2n_2 + 1 \Leftrightarrow n_1 = n_2$, donc f est injective.

On a $f(n) = 2 \Leftrightarrow 2n + 1 = 2 \Leftrightarrow n = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$, donc f n'est pas surjective. Donc f n'est pas bijective.

Correction 5. Étude de la bijectivité de la fonction f : $[1, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ telle que $f(x) = x^2 - 1$:

On utilise le théorème de la bijection.

La fonction f est dérivable sur $[1, +\infty[$ comme fonction polynomiale et pour tout $x \geq 1$, on a : $f'(x) = 2x$. Comme $x \geq 1$, on obtient que sur cet intervalle : $f'(x) \geq 0$. On obtient ainsi le tableau de variation suivant :

| | | |
|-----|---|-----------|
| x | 1 | $+\infty$ |
| f | 0 | $+\infty$ |

La limite en $+\infty$ s'obtient par propriété sur les sommes de limite. Ainsi, on a :

- La fonction f est continue sur $[1, +\infty[$ comme fonction polynomiale.
- La fonction f est strictement croissante sur $[1, +\infty[$.
- $f(1) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Ainsi d'après le théorème de la bijection, la fonction f est bijective de $[1, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$.

Correction 6.

Étude la fonction f : $x \mapsto \frac{2x}{1+x^2}$:

1. **Montrons que f n'est pas injective de \mathbb{R} dans \mathbb{R} :**

La fonction f est définie et dérivable sur \mathbb{R} comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. On obtient : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$. On en déduit ainsi les variations de f :

| | | | | | | |
|---------|-----------|------|------|-----------|-----|-----|
| x | $-\infty$ | -1 | 1 | $+\infty$ | | |
| $f'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ |
| f | 0 | | -1 | | 1 | 0 |

Les limites en $\pm\infty$ s'obtiennent par le théorème du monôme de plus haut degré. Cela nous indique que la fonction f ne va pas être injective de \mathbb{R} dans \mathbb{R} car par exemple, tout nombre entre 0 et 1 strictement va avoir 2 antécédents par f : un antécédent situé entre 0 et 1 et un autre entre 1 et l'infini. Pour montrer rigoureusement que f n'est pas injective de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , il faut trouver un contre-exemple. On résout par exemple $f(x) = \frac{1}{2}$ et on montre que $\frac{1}{2}$ a deux antécédents par f . En effet, on a :

$$f(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2x}{1+x^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 - 4x + 1 = 0.$$

Le discriminant vaut $\Delta = 12$ et on trouve bien deux solutions distinctes $x_1 = 2 + \sqrt{3}$ et $x_2 = 2 - \sqrt{3}$. Ainsi il existe donc $x_1 \neq x_2$, $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $f(x_1) = f(x_2)$. Donc f n'est pas injective de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

2. **Montrons que f n'est pas surjective de \mathbb{R} dans \mathbb{R} :**

Vérifions par exemple que 2 n'a pas d'antécédent par f dans \mathbb{R} (les variations de f nous indiquent quels sont les nombres qui ne vont pas avoir d'antécédent par f). On résout pour cela $f(x) = 2$ et on vérifie que cette équation n'a pas de solution réelle.

$$f(x) = 2 \Leftrightarrow x^2 - x + 1 = 0.$$

Or le discriminant d'une telle équation est strictement négatif ($\Delta = -3$), donc il n'existe pas de solution dans \mathbb{R} . Ainsi, on vient de vérifier que 2 n'a pas d'antécédent par f dans \mathbb{R} et donc que f non surjective de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

3. **Montrons que g est bijective de $[-1, 1]$ dans $[-1, 1]$:**

Pour une telle question, il y a deux méthodes possibles : soit on raisonne par analyse-synthèse en vérifiant qu'il y a une unique solution pour $x \in [-1, 1]$, soit on utilise le théorème de la bijection après avoir étudié les variations de g . Ici on ne nous demande pas l'expression de la réciproque, la méthode la plus simple est donc le théorème de la bijection.

La fonction g est dérivable comme fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas et

$$\forall x \in [-1, 1], g'(x) = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}.$$

Sur l'intervalle $[-1, 1]$, la dérivée est toujours positive, on obtient ainsi le tableau de variation suivant :

| | | |
|-----|------|-----|
| x | -1 | 1 |
| g | -1 | 1 |

On applique alors le théorème de la bijection à g .

- g est continue sur $[-1, 1]$ comme fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas.
- g est strictement croissante sur $[-1, 1]$.
- $g(-1) = -1$ et $g(1) = 1$

Ainsi, d'après le théorème de la bijection, g induit une bijection de $[-1, 1]$ sur $[-1, 1]$.

Correction 7. Étude la fonction $f : x \mapsto \frac{x^2}{1-x}$:

1. Étude de la fonction f

- La fonction f est définie si $1 - x \neq 0$. Ainsi $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
- Limites aux bornes :
 - ★ Limites en $\pm\infty$: par le théorème du plus haut degré, on a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.
 - ★ Limites en 1 : par propriété sur les sommes et quotients de limites, on obtient que : $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$.
- Variations de f
 - ★ La fonction f est dérivable sur \mathcal{D}_f comme somme et quotient dont le dénominateur ne s'annule pas de fonctions dérivables.
 - ★ Pour tout $x \in \mathcal{D}_f$: $f'(x) = \frac{x(2-x)}{(1-x)^2}$.

| | | | | | |
|---------|-----------|-----|-----|------|-----------|
| x | $-\infty$ | 0 | 1 | 2 | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| f | $+\infty$ | | 0 | | $+\infty$ |
| | | | | -4 | |
| | | | | | $-\infty$ |

2. Montrons que f n'est pas injective de \mathcal{D}_f dans \mathbb{R} :

Le tableau de variation nous indique que la fonction f ne va pas être injective de \mathcal{D}_f dans \mathbb{R} car par exemple, tout nombre positif va avoir 2 antécédents par f : un antécédent situé entre 0 et 1 et un autre négatif. Pour montrer rigoureusement que f n'est pas injective de \mathcal{D}_f dans \mathbb{R} , il faut trouver un contre-exemple. On résout par exemple $f(x) = 1$ et on montre que 1 a deux antécédents par f . En effet, on a :

$$f(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{1-x} = 1 \Leftrightarrow x^2 + x - 1 = 0.$$

Le discriminant vaut $\Delta = 5$ et on trouve bien deux solutions distinctes $x_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$.

Ainsi il existe donc $x_1 \neq x_2$, $(x_1, x_2) \in \mathcal{D}_f^2$ vérifiant $f(x_1) = f(x_2)$. Donc f n'est pas injective de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

3. Montrons que f n'est pas surjective de \mathcal{D}_f dans \mathbb{R} :

Vérifions par exemple que -2 n'a pas d'antécédent par f dans \mathbb{R} (les variations de f nous indiquent quels sont les nombres qui ne vont pas avoir d'antécédent par f). On résout pour cela $f(x) = -2$ et on vérifie que cette équation n'a pas de solution réelle.

$$f(x) = -2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 2 = 0.$$

Or le discriminant d'une telle équation est strictement négatif ($\Delta = -4$), donc il n'existe pas de solution dans \mathbb{R} . Ainsi, on vient de vérifier que -2 n'a pas d'antécédent par f dans \mathcal{D}_f et donc que f non surjective de \mathcal{D}_f dans \mathbb{R} .

4. Montrons que g est bijective de $[2, +\infty[$ dans $] -\infty, -4]$:

Pour une telle question, il y a deux méthodes possibles : soit on raisonne par analyse-synthèse en vérifiant qu'il y a une unique solution pour $x \in [2, +\infty[$, soit on utilise le théorème de la bijection après avoir étudié les variations de g . Ici on ne nous demande pas l'expression de la réciproque, la méthode la plus simple est donc le théorème de la bijection.

La fonction g est dérivable comme fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas et

$$\forall x \in [2, +\infty[, g'(x) = \frac{x(2-x)}{(1-x)^2}.$$

Sur l'intervalle $[2, +\infty[$, la dérivée est toujours négative, on obtient ainsi le tableau de variation suivant :

| | | |
|-----|----|-----------|
| x | 2 | $+\infty$ |
| g | -4 | $-\infty$ |

On applique alors le théorème de la bijection à g .

- g est continue sur $[2, +\infty[$ comme fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas.
- g est strictement décroissante sur $[2, +\infty[$.
- $g(2) = -4$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$.

Ainsi, d'après le théorème de la bijection, g induit une bijection de $[2, +\infty[$ sur $] -\infty, -4]$.

Correction 8. La méthode du théorème de la bijection nous donne la bijectivité de f sur les bons ensembles mais pour obtenir l'expression de f^{-1} , il faudra ensuite raisonner par analyse-synthèse. On utilise un raisonnement par analyse-synthèse :

- **Analyse :**

Soit $y \in \mathbb{R}$. On résout $y = f(x)$ dans $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$.

$$y = \frac{x-1}{1-2x} \Leftrightarrow x(2y+1) = y+1 \Leftrightarrow x = \frac{y+1}{2y+1} \quad \text{si } y \neq -\frac{1}{2}.$$

- **Synthèse :**

★ si $y = -\frac{1}{2}$. Alors l'équation $f(x) = y$ équivaut à $0 = \frac{1}{2}$, donc n'admet aucune solution. Ainsi $-\frac{1}{2}$ n'admet pas d'antécédent par f .

★ si $y \neq -\frac{1}{2}$. Alors l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution : $x = \frac{y+1}{2y+1}$. De plus, $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$ car : $x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{y+1}{2y+1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2 = 1$. Impossible donc on a bien $x \neq \frac{1}{2}$. **Conclusion :**

f réalise donc une bijection de $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$ sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{2} \right\}$ et la bijection réciproque de f est

$$f^{-1} : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{2} \right\} & \rightarrow \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\} \\ y & \mapsto \frac{y+1}{2y+1} \end{cases}$$

Correction 9. Il vaut mieux ici commencer par étudier la fonction pour savoir quels ensemble prendre au départ et à l'arrivée.

La fonction f est définie et dérivable sur \mathbb{R} comme composée et somme de fonctions dérivables. De plus, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Étudions alors le signe de $e^x - e^{-x}$: on a : $e^x - e^{-x} = \frac{e^{2x} - 1}{e^x}$. Comme $e^x > 0$, il suffit d'étudier le signe de $e^{2x} - 1$.

On a : $e^{2x} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^{2x} \geq 1 \Leftrightarrow 2x \geq 0$ car la fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+\ast}$. On obtient donc :

| | | | |
|---------|-----------|-----|-----------|
| x | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | | $-$ | $+$ |
| f | $+\infty$ | 1 | $+\infty$ |

Justification des limites aux bornes du domaine de définition : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ par propriétés sur la somme, la composée et le quotient de limite. De même $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$. De plus $f(0) = 1$.

On peut conjecturer que f n'est pas bijective de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , mais qu'en revanche f est bijective de $[0, +\infty[$ dans $[1, +\infty[$. Démontrons le par analyse-synthèse.

- Analyse : soit $y \in [1, +\infty[$ fixé. On résout dans \mathbb{R}^+ l'équation $y = f(x)$. Par définition de la fonction f , on obtient donc :

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \Leftrightarrow 2y = e^x + e^{-x} \Leftrightarrow \frac{e^{2x} - 2ye^x + 1}{e^x} = 0 \Leftrightarrow e^{2x} - 2ye^x + 1 = 0.$$

On pose $X = e^x$ et on doit résoudre $X^2 - 2yX + 1 = 0$. Le discriminant vaut $\Delta = 4(y^2 - 1)$. Comme $y \geq 1$, on obtient que $\Delta \geq 0$.

★ Si $y = 1$, on a $\Delta = 0$, et une seule racine $X = 1$. On a alors $e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$.

★ Si $y > 1$, on a $\delta > 0$, et il existe deux solutions réelles distinctes $X_1 = y + \sqrt{y^2 - 1}$ et $X_2 = y - \sqrt{y^2 - 1}$. Ainsi on doit résoudre $e^x = y + \sqrt{y^2 - 1}$ ou $e^x = y - \sqrt{y^2 - 1}$. On remarque que $y + \sqrt{y^2 - 1} > 0$ comme somme de deux nombres positifs avec l'un des deux, ici y , strictement positif. De même $y - \sqrt{y^2 - 1} > 0$ car on a : $y - \sqrt{y^2 - 1} > 0 \Leftrightarrow y > \sqrt{y^2 - 1} \Leftrightarrow y^2 > y^2 - 1$ car les deux nombres sont positifs et la fonction carrée est strictement croissante sur \mathbb{R}^+ . Et donc $y - \sqrt{y^2 - 1} > 0 \Leftrightarrow 0 > -1$ ce qui est toujours vrai. Ainsi on obtient que $x = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1})$ ou $x = \ln(y - \sqrt{y^2 - 1})$. Mais on cherche $x \in \mathbb{R}^+$ donc il faut que $y + \sqrt{y^2 - 1} \geq 1$ ou $y - \sqrt{y^2 - 1} \geq 1$. La résolution donne que la première inéquation est toujours vraie et la deuxième toujours fautive. Ainsi on prend $x = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1})$.

- Synthèse : Dans tous les cas, l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution dans \mathbb{R}^+ . Donc f est bijective de \mathbb{R}^+ dans $[1, +\infty[$ et sa fonction réciproque f^{-1} vérifie :

$$f^{-1} : \begin{cases} [1, +\infty[& \rightarrow & \mathbb{R}^+ \\ y & \mapsto & \ln(y + \sqrt{y^2 - 1}). \end{cases}$$

Correction 10. Montrons que l'application $f : z \mapsto \frac{z+i}{z-i}$ est une bijection de $\mathbb{C} \setminus \{i\}$ sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ et donnons la bijection réciproque :

La fonction f n'est pas une fonction numérique donc on utilise la méthode par analyse-synthèse pour montrer que f est bijective car le théorème de la bijection ne s'applique que pour les fonctions numériques.

- Analyse : Soit $y \in \mathbb{C}$ fixé. On résout dans $\mathbb{C} \setminus \{i\}$ l'équation $y = f(z)$. Par définition de la fonction f , on obtient donc :

$$y = f(z) \Leftrightarrow y = \frac{z+i}{z-i} \Leftrightarrow y(z-i) = z+i \Leftrightarrow z(y-1) = i(1+y).$$

On a utilisé ici que $z-i$ n'est pas nul car $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$ pour pouvoir multiplier par $z-i$ tout en conservant l'équivalence. Ici il faut distinguer deux cas :

★ Si $y = 1$: on obtient $0 = 2i$: impossible. Donc 1 n'a pas d'antécédent par f .

★ Si $y \neq 1$: On obtient : $y = f(z) \Leftrightarrow z = \frac{i(1+y)}{y-1}$.

- **Synthèse** : Soit $y \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. L'équation $y = f(z)$ admet une unique solution $z = \frac{i(1+y)}{y-1}$. On a de plus $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$ car : $\frac{i(1+y)}{y-1} = i \Leftrightarrow \frac{1+y}{y-1} = 1 \Leftrightarrow 1 = -1$: impossible.
Conclusion : la fonction f est bijective de $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ dans $\mathbb{C} \setminus \{i\}$ et sa fonction réciproque f^{-1} vérifie :

$$f^{-1} : \begin{cases} \mathbb{C} \setminus \{1\} & \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{i\} \\ y & \mapsto \frac{i(y+1)}{y-1} \end{cases}$$

Correction 11. Étude de la fonction f afin d'enlever le maximum. On résout $\frac{x+5}{10} \leq x-3$ et on obtient :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+5}{10} & \text{si } x \leq \frac{35}{9} \\ x-3 & \text{si } x \geq \frac{35}{9} \end{cases}$$

Si l'on représente la courbe de f , on conjecture graphiquement que la fonction est bijective. Comme on veut l'expression de la bijection réciproque, on raisonne par analyse-synthèse.

- **Analyse** :

Soit $y \in \mathbb{R}$. On résout dans \mathbb{R} l'équation $y = f(x)$.

- ★ Si $x \leq \frac{35}{9}$: on a alors $y = \frac{x+5}{10}$, à savoir $x = 10y - 5$. Et cette équation est valable pour y tel que $x \leq \frac{35}{9}$, c'est-à-dire pour $y \leq \frac{8}{9}$.
- ★ Si $x \geq \frac{35}{9}$: on a alors $y = x - 3$, à savoir $x = y + 3$. Et cette équation est valable pour y tel que $x \geq \frac{35}{9}$, c'est-à-dire pour $y \geq \frac{8}{9}$.

- **Synthèse** : Pour tout $y \in \mathbb{R}$, l'équation $y = f(x)$ admet une unique solution : $x = \begin{cases} 10y - 5 & \text{si } y \leq \frac{8}{9} \\ y + 3 & \text{si } y \geq \frac{8}{9} \end{cases}$.

Conclusion : f est une bijection de \mathbb{R} sur \mathbb{R} de bijection réciproque l'application

$$f^{-1} : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ y & \mapsto f^{-1}(y) = \begin{cases} 10y - 5 & \text{si } y \leq \frac{8}{9} \\ y + 3 & \text{si } y \geq \frac{8}{9} \end{cases} \end{cases}$$

Remarquons que f^{-1} peut également s'exprimer de la façon suivante : $f^{-1}(y) = \min(10y - 5, y + 3)$. **Correction**

12. Montrons que f est bijective de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 et déterminons f^{-1} :

Comme on cherche l'expression de f^{-1} , on raisonne par analyse-synthèse.

- **Analyse** : Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ fixé. On résout dans \mathbb{R}^2 l'équation $(a, b) = f(x, y)$. Par définition de la fonction f , on obtient donc :

$$(a, b) = f(x, y) \Leftrightarrow (a, b) = (x + y, x - y) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = a \\ x - y = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{a+b}{2} \\ y = \frac{a-b}{2} \end{cases}$$

On a ainsi exprimé (x, y) de façon unique en fonction de (a, b) .

- **Synthèse** : Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, l'équation $(a, b) = f(x, y)$ admet une unique solution : $(x, y) = \left(\frac{a+b}{2}, \frac{a-b}{2}\right)$.

Conclusion : La fonction f est bijective de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 et sa fonction réciproque f^{-1} vérifie :

$$f^{-1} : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (a, b) & \mapsto \left(\frac{a+b}{2}, \frac{a-b}{2}\right). \end{cases}$$

Correction 13.

1. **Montrer que $\forall u \in \mathbb{U}, f(u) = u$ et en déduire que f est surjective.**

Soit $u \in \mathbb{U}$. On a alors : $f(u) = \frac{u}{|u|}$. Or $u \in \mathbb{U}$, donc $|u| = 1$, et on a bien $\forall u \in \mathbb{U}, f(u) = u$.

Ainsi, tout $u \in \mathbb{U}$ admet un antécédent par f dans \mathbb{C}^* , qui est u lui-même : f est surjective.

2. **Déterminons $f^{-1}(\{u\})$. Montrons que la fonction f n'est pas injective :**

- Calcul de $f^{-1}(\{u\})$. On a, par définition d'une image réciproque d'une fonction :

$$z \in f^{-1}(\{u\}) \Leftrightarrow f(z) = u \Leftrightarrow \frac{z}{|z|} = e^{i\theta}.$$

Comme $Z \neq 0$, on pose $z = re^{i\theta'}$ avec $r > 0$ et $\theta' \in [0, 2\pi[$, et on obtient :

$$\frac{z}{|z|} = e^{i\theta} \Leftrightarrow \frac{re^{i\theta'}}{r} = e^{i\theta} \Leftrightarrow e^{i\theta'} = e^{i\theta} \Leftrightarrow \theta = \theta'$$

car $(\theta, \theta') \in [0, 2\pi]^2$. Ainsi $f^{-1}(\{u\})$ est l'ensemble de tous les nombres complexes non nul dont un argument est θ : $f^{-1}(\{u\}) = \{re^{i\theta}, r > 0\}$.

- Comme l'image réciproque $f^{-1}(\{u\})$ contient une infinité d'éléments, ceci prouve que la fonction f n'est pas injective.

III Injection, surjection, bijection sur des exemples abstraits

Correction 14. On suppose que $f : A \rightarrow B$ et $g : B \rightarrow C$. On obtient alors que $g \circ f : A \rightarrow C$.

1. **Montrons que la composée de deux injections est une injection :**

On suppose que $f : A \rightarrow B$ est injective et $g : B \rightarrow C$ est injective. Montrons qu'alors $g \circ f$ est injective de A dans C .

Soit $(x_1, x_2) \in A^2$ tels que $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$.

On obtient donc $g[f(x_1)] = g[f(x_2)]$. Or g est injective donc $f(x_1) = f(x_2)$. Mais f est aussi injective donc $x_1 = x_2$.

Conclusion : $g \circ f$ est injective de A dans C .

2. **Montrons que la composée de deux surjections est une surjection :**

On suppose que $f : A \rightarrow B$ est surjective et $g : B \rightarrow C$ est surjective. Montrons qu'alors $g \circ f$ est surjective de A dans C .

Soit $y \in C$.

$g : B \rightarrow C$ est surjective donc il existe $x_1 \in B$ tel que $y = g(x_1)$.

Or $x_1 \in B$ et f est surjective de A dans B , donc il existe $x \in A$ tel que $x_1 = f(x)$.

$x \in A$ et il vérifie $y = g(f(x)) = g \circ f(x)$.

Conclusion : $g \circ f$ est surjective de A dans C .

Correction 15.

1. **Montrons que si $g \circ f = Id_E$, alors g est surjective et f est injective :**

On suppose que $g \circ f = Id_E$.

• **Montrons que g est surjective de F dans E :**

Soit $y \in E$.

Par hypothèse, on a donc $y = g \circ f(x)$, c'est-à-dire $y = g[f(x)]$. On pose alors $X = f(x)$, $X \in F$ et $y = g(X)$.

Conclusion : g est surjective de F dans E .

• **Montrons que f est injective de E dans F :**

Soit $(x_1, x_2) \in E^2$ tel que $f(x_1) = f(x_2)$.

Comme $f(x_1) = f(x_2)$, on a $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$. Or par hypothèse $g \circ f = Id_E$. Donc $g \circ f(x_1) = x_1$ et $g \circ f(x_2) = x_2$. Ainsi, on obtient $x_1 = x_2$.

Conclusion : f est injective de E dans F .

2. **Montrer que si $f \circ g$ et $g \circ f$ sont bijectives, alors f et g sont bijectives :**

On suppose que $g \circ f$ et $f \circ g$ sont bijectives. Par définition de la bijectivité, il existe donc une fonction $h : F \rightarrow F$ telle que $(f \circ g) \circ h = Id_F$ et $h \circ (f \circ g) = Id_F$. De même, il existe aussi une fonction $p : E \rightarrow E$ telle que $(g \circ f) \circ p = Id_E$ et $p \circ (g \circ f) = Id_E$.

On applique alors les résultats démontrés ci-dessus.

Comme $f \circ (g \circ h) = Id_F$, on sait que f est surjective de E dans F . Comme $(h \circ f) \circ g = Id_F$, g est injective de F dans E . Comme $g \circ (f \circ p) = Id_E$, g est surjective de F dans E . Et enfin, comme $(p \circ g) \circ f = Id_E$, f est injective de E dans F .

Conclusion : les deux fonctions étant à la fois injective et surjective, elle sont bien bijectives.

Correction 16.

1. **On suppose que $g \circ f$ est injective de E dans G et que f est surjective de E dans F . Montrons que g est injective de F dans G :**

Soit $x_1 \in F$ et $x_2 \in F$ tels que $g(x_1) = g(x_2)$. On cherche à montrer que $x_1 = x_2$.

Comme f est surjective de E dans F et que $x_1 \in F$ et $x_2 \in F$, on sait qu'il existe $X_1 \in E$ et $X_2 \in E$ tels que $x_1 = f(X_1)$ et $x_2 = f(X_2)$. De plus comme par hypothèse, on a : $g(x_1) = g(x_2)$, on obtient que : $g \circ f(X_1) = g \circ f(X_2)$. Mais $g \circ f$ est injective de E dans G donc $X_1 = X_2$. Puis comme on peut toujours composer par f , on obtient donc $f(X_1) = f(X_2)$, à savoir $x_1 = x_2$. Donc on vient bien de montrer que

g est injective de F dans G .

2. **On suppose que $g \circ f$ est surjective de E dans G et que g est injective de F dans G . Montrons que f est surjective de E dans F :**

Soit $y \in F$. En particulier on sait alors que $g(y) \in G$. Comme $g \circ f$ est surjective de E dans G , on sait qu'il existe $x \in E$ tel que $g(y) = g \circ f(x) = g[f(x)]$. De plus, on sait que g est injective de F dans G donc on a : $y = f(x)$. Ainsi on a bien montré l'existence de $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Donc f est surjective de E dans F .

Correction 17.

1. **Montrons que si f ou g est injective de E dans F ou de E dans G alors h est injective de E dans $F \times G$:**

On suppose que f ou g est injective. Par exemple, on suppose que f est injective de E dans F (le même type de raisonnement s'applique à g). Montrons que h est injective de E dans $F \times G$.

Soient $x_1 \in E$ et $x_2 \in E$ tels que $h(x_1) = h(x_2)$. On cherche à montrer que $x_1 = x_2$.

Par définition de h , on a donc : $(f(x_1), g(x_1)) = (f(x_2), g(x_2))$ ce qui est équivalent à : $f(x_1) = f(x_2)$ et $g(x_1) = g(x_2)$. Mais comme f est injective de E dans F on en déduit donc que $x_1 = x_2$.

Ainsi on vient bien de démontrer que h est injective de E dans $F \times G$.

2. **On suppose que f est surjective de E dans F et que g est surjective de E dans G . Montrons que l'application h n'est pas surjective de E dans $F \times G$:**

L'application h ne va pas être surjective de E dans $F \times G$ car on ne va pas avoir forcément le même x . Plus précisément : soit $(a, b) \in F \times G$, on cherche s'il existe $x \in E$ tel que $h(x) = (a, b)$ à savoir tel

que $(f(x), g(x)) = (a, b)$ ce qui est équivalent à chercher $x \in E$ tel que $f(x) = a$ et $g(x) = b$. Comme f est surjective de E dans F , on sait qu'il existe $x \in E$ tel que $f(x) = a$. Et comme g est surjective de E dans G , on sait qu'il existe $x' \in E$ tel que $g(x') = b$. Mais il n'y a aucune raison pour que x et x' soient égaux! Trouvons un exemple où ils ne vont pas être égaux (il y en a plein) : on pose $E = F = G = \mathbb{R}$ et $f(x) = x$ et $g(x) = 2x$. Vérifions que $h : x \mapsto (x, 2x)$ n'est pas surjective de \mathbb{R} dans \mathbb{R} alors que f et g le sont bien (f et g sont même bijectives de \mathbb{R} dans \mathbb{R}). Par exemple si on prend $(a, b) = (1, 1)$, on peut vérifier qu'il n'existe pas de $x \in \mathbb{R}$ tel que $h(x) = (1, 1)$. En effet, on devrait avoir $x = 1$ et en même temps $2x = 1$ ce qui est impossible. Donc h n'est pas surjective de \mathbb{R} dans \mathbb{R} alors que f et g le sont.

Correction 18. Soit $f : E \rightarrow E$ une application telle que $f \circ f \circ f = f$. Montrer que f est injective si et seulement si f est surjective :

On suppose que $f \circ f \circ f = f$. Pour montrer l'équivalence voulue, on procède par double implication.

- On suppose que f est injective de E dans E . On cherche alors à montrer que f est surjective de E dans E . Soit $y \in E$.
Par hypothèse, on sait que $f(y) = f \circ f \circ f(y)$, à savoir : $f(y) = f[f(f(y))]$. Mais comme f est injective, on obtient que $y = f(f(y)) = f(x)$ en posant $x = f(y) \in E$.
Ainsi on a bien montré qu'il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Donc f est bien surjective de E dans E et on a montré la première implication.
- On suppose maintenant que f est surjective de E dans E . Montrons que f est injective de E dans E . Soient $x_1 \in E$ et $x_2 \in E$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$. On cherche à montrer que $x_1 = x_2$.
Comme f est surjective de E dans E et que $x_1 \in E$ et $x_2 \in E$, on sait qu'il existe $z_1 \in E$ et $z_2 \in E$ tels que $x_1 = f(z_1)$ et $x_2 = f(z_2)$. De même en réutilisant la surjectivité de f , on sait aussi qu'il existe $w_1 \in E$ et $w_2 \in E$ tels que $z_1 = f(w_1)$ et $z_2 = f(w_2)$. Ainsi $f(x_1) = f(x_2)$ est équivalent à : $f(f(f(w_1))) = f(f(f(w_2)))$. Mais comme on sait que f vérifie : $f \circ f \circ f = f$, on obtient que : $f(w_1) = f(w_2)$, à savoir $z_1 = z_2$. Puis comme on peut toujours composer par une fonction, ceci implique alors toujours que $f(z_1) = f(z_2)$, à savoir $x_1 = x_2$. Donc on a bien montré que $x_1 = x_2$ et donc que f est injective de E dans E .