Chapitre 15 : Vocabulaire des applications

Table des matières

I Applications d'un ensemble dans un autre

I. 1 Définitions et exemples

Définition 1. Soient E et F deux ensembles.

- Une application (ou fonction) de E dans F est un procédé qui associe à tout élément de E un unique élément de F.
- E est appelé domaine de définition de f, ou ensemble de départ.
- F est l'ensemble d'arrivée de f
- $y = f(x)$ est l'image de x par f.
- x est un antécédent de y par f.

Notations : On note $f : \left| \begin{array}{ccc} E & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array} \right.$ ou $f : x \mapsto f(x)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur les ensembles.

Remarques.

- ⚠ Ne pas confondre f : la fonction, la "machine" qui fait passer de x à $f(x)$ et $f(x)$: l'élement de l'espace d'arrivée.

C'est comme confondre des carottes rapées et le mixeur qui a été utilisé pour les raper.

Exercice 2.

1. Soit $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2+2 \end{array} \right.$. Donner l'image de 4 par f. Donner s'ils existent les antécédents de $11, 0$ et 5 par f.
2. Soit $g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & n^2+2 \end{array} \right.$. Donner l'image de 4 par g. Donner s'ils existent les antécédents de $11, 0$ et 5 par g.
3. Soit $F : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (2x+y, x-y, x+2y) \end{array} \right.$. Donner l'image de $(1,2)$ par F. Donner s'ils existent les antécédents de $(1,2,3)$ et $(2,1,1)$

Exemples usuels

❶ **L'identité :**
Soit E un ensemble. On définit la fonction identité de E notée Id_E par :

❷ **La fonction caractéristique ou fonction indicatrice d'un ensemble :**
Soit E un ensemble et A un sous ensemble de E. On définit la fonction caractéristique de A ou fonction indicatrice de A par

$$\chi_A : \left| \begin{array}{ccc} E & \to & \{0,1\} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array} \right.$$

❸ **Les fonctions numériques :**
Exemples : (ne pas oublier les ensembles de départ et d'arrivée) $f(x) = \exp(x)$

❹ **Les suites**
Ce sont les fonctions de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$

❺ **Exemples de fonctions d'une variable complexe et/ou à valeurs complexes**

- $\theta \mapsto e^{i\theta}$
- $z \mapsto \frac{z-i}{z+2}$
- $z \mapsto |z|$

❻ **Exemples de fonctions à plusieurs variables**

- $(x,y) \mapsto (2x+y, x-y)$
- $(x,y) \mapsto (exp(x) + \frac{y}{\cos(x)}, 1)$

Définition 3. Deux applications f et g sont égales si

- Elles ont même ensemble de départ (E) et d'arrivée (F).
- Et pour tout $x \in E$, $f(x) = g(x)$

Remarque. ⚠ Les domaines de départ et d'arrivée sont importants !

I. 2 Image directe

Définition 4. Soit f une application de E dans F et A un sous-ensemble de E.
On appelle image directe de A par f :

$$f(A) = \{f(x) | x \in A\}$$

Ainsi on a toujours $f(A) \subset F$

Avec des quantificateurs : $y \in f(A) \Longleftrightarrow \exists x \in A\, f(x) = y$

Exemples.

$\exp(\mathbb{R}) =$ $\cos\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right) =$ $\tan\left(\left]-\frac{\pi}{2} \frac{\pi}{2}\right[\right) =$ $\ln(]0,1]) =$

Proposition 5. Soit f une application de E dans F. Soient A, B sous-ensembles de E.

- Si $A \subset B$ alors $f(A) \subset f(B)$
- $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
- $f(A \cap B) \cup f(A) \cap f(B)$

Exemples. Calculer

$$\cos\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right) \cap \cos\left(\left[\frac{-\pi}{2}, 0\right]\right)$$

puis

$$\cos\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cap \left[\frac{-\pi}{2}, 0\right]\right)$$

Exemple 1. — Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{3x}{1-x^2}$. Calculer $f(]-1,1[)$ et $f(]-2,0] \setminus \{-1\})$.

I. 3 Composition des applications

Définition 6. Soient E, F et G trois ensembles, $f : E \to F$ et $g : F \to G$.

- On appelle application composée de f par g notée $g \circ f$ l'application définie par

$$g \circ f : \left| \begin{array}{ccc} E & \to & G \\ x & \mapsto & g(f(x)) \end{array} \right.$$

- Cela correspond au diagramme suivant :

Compo.jpg

Exemples. Calculer pour chacun des cas suivants et lorsque cela a un sens $f \circ g$ et $g \circ f$.

1. On considère les deux applications $f : \left| \begin{array}{lll} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 - 1 \end{array} \right.$ et $g : \left| \begin{array}{lll} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x - 2. \end{array} \right.$
2. On considère les deux applications $f : \left| \begin{array}{lll} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right.$ et $g : \left| \begin{array}{lll} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x}. \end{array} \right.$
3. On considère les deux applications $f : \left| \begin{array}{lll}]0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln x \end{array} \right.$ et $g : \left| \begin{array}{lll} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^- \\ x & \mapsto & -x^2. \end{array} \right.$

II Applications injectives

II. 1 Définition et exemples

Définition 7. Soient E, F deux ensembles et $f : E \to F$ une application.
On dit que f est injective de E dans F ou que f est une injection de E dans F si chaque élément image a au plus un antécédent.

Exemple 2. Parmi les dessins suivants, lequel représente une fonction injective ?

Avec des quantificateurs :

$$\forall x, y \in E^2, f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y$$

$$\forall x, y \in E^2, x \neq y \Longrightarrow f(x) \neq f(y)$$

Exercice 8. Soit $f : A \to B$ et $g : B \to C$. Montrer que $g \circ f$ injective $\Rightarrow$ f injective.

Exercice 9. Montrer que l'application $z \in \mathbb{C} \mapsto \overline{z} \in \mathbb{C}$ est injective.

Exercice 10. Étudier l'injectivité des fonctions suivantes :

1. $x \in \mathbb{R} \mapsto |x| \in \mathbb{R}$
2. $z \in \mathbb{C} \mapsto |z| \in \mathbb{R}^+$.
3. $z \in \mathbb{C} \mapsto \mathfrak{Re}(z) \in \mathbb{R}$.
4. $\theta \in \mathbb{R} \mapsto e^{i\theta} \in \mathbb{C}$.

Remarque. Pour les fonctions numériques, l'injectivité s'observe graphiquement en balayant le plan par une droite horizontale qui doit rencontrer au plus une fois le graphe de la fonction.
Exemples :

II. 2 Cas particulier des fonctions numériques

Si $f : I \to \mathbb{R}$ avec $I \subset \mathbb{R}$, on peut utiliser la propriété suivante :

Proposition 11. Soient $I \subset \mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une application.

Si f est strictement monotone sur I alors f est injective sur I.

Remarque. Lien avec la composition d'égalités par une fonction :

- $a = b \Longrightarrow f(a) = f(b)$ est toujours vrai.
- $a = b \Longleftrightarrow f(a) = f(b)$ seulement quand f est injective.

Méthode : toujours commencer par étudier la fonction et faire son tableau de variation. Cela permet :

- De prouver directement l'injectivité là où elle est strictement monotone.
- De donner une idée du contre-exemple là où elle n'est pas injective.

Exercice 12. Étudier l'injectivité des fonctions $f : x \mapsto \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$ et $g : x \mapsto \dfrac{x^2}{1+x}$.

Remarque. Le caractère injectif d'une fonction est lié à son ensemble de départ. Ainsi si f n'est pas injective, il est possible de restreindre f sur un ensemble de départ plus petit pour obtenir une injection.
Exemple : trouver un intervalle I tel que la fonction $f : \left| \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right.$ soit injective.

III Applications surjectives

III. 1 Définition et exemples

Définition 13. Soient $E,\ F$ deux ensembles et $f : E \to F$ une application. On dit que f est surjective de E dans F ou que f est une surjection de E dans F si

Avec des quantificateurs :

$$\forall y \in F,\, \exists x \in E,\, y = f(x)$$

Exemple 3. Parmi les dessins suivants, lequel représente une fonction surjective ?

Remarque. Le caractère surjectif d'une fonction est ainsi lié à son ensemble d'arrivée. Ainsi si f n'est pas surjective, il est possible de restreindre l'ensemble d'arrivée pour obtenir une application surjective. Exemple :

Exercice 14. Soit $f : A \to B$ et $g : B \to C$. Montrer que $g \circ f$ surjective $\Rightarrow$ g surjective.

Exercice 15. Étudier la surjectivité des fonctions suivantes :

1. $x \in \mathbb{R} \mapsto \cos x \in \mathbb{R}$.
2. $x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 + 4x \in \mathbb{R}$.
3. $\theta \in \mathbb{R} \mapsto e^{i\theta} \in \mathbb{C}$.
4. $z \in \mathbb{C} \mapsto |z| \in \mathbb{R}$.

III. 2 Cas des fonctions numériques

Remarque. Pour les fonctions numériques, la surjectivité s'observe graphiquement en balayant le plan par une droite horizontale qui doit rencontrer .... le graphe de la fonction. Exemples :

On peut alors utiliser le théorème des valeurs intermédiaires.

Proposition 16. Soit f une fonction .... sur un intervalle $[a, b]$. Alors pour tout y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $y = f(c)$.

Il est possible de généraliser avec des intervalles ouverts ou semi-ouverts, en utilisant les limites.

Exercice 17. Soit la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+1}$. Montrer que f est surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

III. 3 Lorsque l'on connaît l'expression de f

Dans le cas d'exercices plus concrets dans lesquels l'expression de la fonction est connue, on peut raisonner par analyse-synthèse en résolvant l'équation $f(x) = y$.

- **Analyse :** Soit $y \in F$. On résout l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in E$.

- **Synthèse :** deux cas sont possibles.
  - ⋆ Si pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ admet au moins une solution x dans E, alors f est surjective de E dans F.
  - ⋆ S'il existe au moins un $y \in F$ tel que l'équation $f(x) = y$ n'admet pas de solution x dans E, alors f n'est pas surjective de E dans F.

Exercice 18. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{C}$ par $f(z) = \exp(z)$. Montrer que f est surjective de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}^\star$.

Exercice 19. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{C}$ par $f(z) = \frac{2z+i}{z-i}$. Montrer que f est surjective de D_f dans $\mathbb{C} \setminus \{2\}$.

IV Applications bijectives

IV. 1 *Définition et exemples*

Définition 20. Soient $E,\ F$ deux ensembles et $f : E \to F$ une application.

- On dit que f est bijective de E dans F ou que f est une bijection de E dans F si f est bijective et injective.

Avec des quantificateurs :

$$\forall y \in F,\ \exists! x \in E,\ y = f(x)$$

Remarques.

- Le caractère bijectif d'une application est ainsi lié à son ensemble de départ et d'arrivée. Ainsi si f n'est pas bijective, il est possible de restreindre les ensemble de départ et d'arrivée pour obtenir une application bijective.
- ⚠ Que ce soit pour l'injectivité, la surjectivité ou la bijectivité d'une application, il est indispensable de toujours bien préciser ....

IV. 2 *Application réciproque*

Proposition 21. Soient $E,\ F$ deux ensembles et $f : E \to F$ une application.
L'application f est bijective de E dans F s'il existe une application g de F dans E telle que l'on ait

L'application g est alors notée ...... et est appelée ....

Proposition 22. Si f est une application bijective de E dans F alors :

- f^{-1} :..
- $\forall x \in E,\ \forall y \in F$:..

Proposition 23. Soient $E,\ F$ et G trois ensembles. Soient f une application bijective de E dans F et g une application bijective de F dans G. Alors :

- ....
- ....

Démonstration. □

Exemple 4. Montrer que l'application $h : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & [1, +\infty[\\ x & \mapsto & e^{\sqrt{x}} \end{array} \right.$ est bijective et calculer h^{-1}.

IV. 3 Caractérisations

Montrer que f est injective et surjective Voir les méthodes pour montrer qu'une fonction est injective et surjective.

Utiliser la caractérisation de l'application réciproque (rare) Trouver une application g vérifiant $f \circ g = Id$ et $g \circ f = Id$.

Par analyse-synthèse Lorsque l'on connaît l'expression de f, on peut raisonner par analyse-synthèse en résolvant $f(x) = y$. Il faut y penser en particulier lorsque l'on vous demande l'expression de la bijection réciproque.

- Soit $y \in F$. On résout l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in E$.
- **Synthèse :** deux cas sont possibles.
  - ⋆ Si pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ admet une UNIQUE solution x dans E, alors f est bijective de E dans F.

    On obtient alors l'expression de l'application réciproque : $f^{-1} : \left| \begin{array}{ccc} F & \to & E \\ y & \mapsto & g(y) \end{array} \right.$, où $g(y)$ est l'unique solution dans E de $f(x) = y$.
  - ⋆ S'il existe au moins un $y \in F$ tel que l'équation $f(x) = y$ admette 0 ou au moins 2 solutions dans E, alors f n'est pas bijective de E dans F.

Exercice 24. Étudier la bijectivité de la fonction f définie par $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$ et calculer l'expression de f^{-1} lorsqu'elle existe.

Montrer que f n'est pas bijective f non bijective de E dans $F \Leftrightarrow$ ....

IV. 4 Cas particulier des fonctions numériques

Remarque. Pour les fonctions numériques, la bijectivité s'observe graphiquement en balayant le plan par une droite horizontale qui doit rencontrer .... le graphe de la fonction.
Exemples :

Théorème de la bijection

Théorème 25. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction numérique tel que
- f est continue sur I
- f est strictement monotone sur I

Alors f réalise une bijection de I sur $f(I)$.

On peut généraliser à des intervalles ouverts ou semi-ouverts en utilisant les limites.
Y penser lorsque l'on demande uniquement de montrer que la fonction est bijective (utiliser directement la méthode par analyse-synthèse si l'énoncé demande aussi l'expression de f^{-1}).

Exercice 26. Étudier la bijectivité de $x \mapsto 1 + \dfrac{1}{x}$.

Exercice 27. Étudier la bijectivité des applications suivantes : $f : x \mapsto \dfrac{x+1}{x-1}$ et $g : x \mapsto x^2 + 2x - 3$.

IV. 5 Étude de la fonction réciproque

Proposition 28 (Graphe d'une fonction réciproque)**.**
Si f est bijective de I sur J, alors $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ sont ....

Exemple 5. Tracer les graphes des fonctions cube et racine cubique.

Proposition 29 (Monotonie d'une fonction réciproque)**.**
Si f est bijective et monotone de I sur J, alors f^{-1} ....

Exercice 30. Calculer les variations et étudier la bijectivité de la fonction $f : x \mapsto x^2 - x \ln x - 1$ de $\mathbb{R}^{+\star}$ sur un intervalle à déterminer. En déduire les variations de f^{-1}.

Théorème 31 (Théorème de dérivabilité d'une fonction réciproque)**.**
Soit $f : I \to J$ une fonction bijective, et $f^{-1} : J \to I$ sa fonction réciproque. Soit $x_0 \in I$ tel que :

- ....
- ....

Alors f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ et $(f^{-1})'(y_0) =$

Méthode pour étudier la dérivabilité d'une réciproque :

- Justifier que f est dérivable sur I et calculer sa dérivée.
- Déterminer tous les points x_0 où f' s'annule, et calculer les $y_0 = f(x_0)$ correspondants.
- On sait alors d'après le théorème de dérivabilité d'une réciproque que :
  - ⋆ f^{-1} est dérivable sur l'intervalle J privé de tous les points y_0 calculés ci-dessus.
  - ⋆ Et pour tout $y \neq y_0$, on a : $(f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))}$.

Exercice 32. Étudier la dérivabilité et calculer la dérivée de la fonction racine cubique.

Exemple 6. Fonctions usuelles :

Fonction	Injective ?	Surjective ?	Bijective ?
sinus : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$			
cosinus : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$			
tangente : $\mathbb{R} \backslash \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \to \mathbb{R}$			
exponentielle : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$			
logarithme : $]0, +\infty[\to \mathbb{R}$			
carrée : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$			
cube : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$			
racine carrée : $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$			
inverse : $\mathbb{R}^\star \to \mathbb{R}$			
valeur absolue : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$			