

TD - 16 : Limites

I Calculs de limites

Exercice 1. Calculer les limites des fonctions suivantes aux bornes de leur domaine de définition. On justifiera correctement les résultats. On fera, lorsque cela est possible, l'interprétation graphique des résultats.

- | | | |
|---|--|--|
| <p>1. $f(x) = e^{x^2+x+1}$</p> <p>2. $f(x) = e^{2x} - e^x$</p> <p>3. $f(x) = \frac{e^x + x^2 + x + 1}{e^{2x} + 1}$</p> <p>4. $f(x) = \frac{x}{x-1} e^{\frac{1}{x}}$</p> <p>5. $f(x) = e^{x^2} - e^{x+1}$</p> | <p>6. $f(x) = \ln\left(\frac{e^x + 1}{e^x - 1}\right)$</p> <p>7. $f(x) = \ln\left(\frac{e^x + x^2}{2x + 1}\right)$</p> <p>8. $f(x) = \ln\left(\frac{2-x}{x+4}\right)$</p> <p>9. $f(x) = \frac{2^x}{x^2 + 1}$</p> <p>10. $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x \ln x$</p> | <p>11. $f(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{x^2}$</p> <p>12. $f(x) = e^x - x^{\frac{2}{3}}$</p> <p>13. $f(x) = e^{\frac{1}{x-2}}$</p> <p>14. $f(x) = (2x-1)e^{\frac{1}{x-2}}$</p> <p>15. $f(x) = \frac{\ln(x^2 + 1)}{x}$</p> |
|---|--|--|

Exercice 2. Avec des polynômes :

- | | | |
|--|---|--|
| <p>1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^7 + 4x^2 - 1}{x^9 + 1}$</p> <p>2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^7 + x^2 - x}{x^6 + 4x^2}$</p> <p>3. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^7 + x^2 - x}{x^6 + 4x^2}$</p> <p>4. $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x^2 + 2x - 5}{x^2 + 4x - 5}$</p> | <p>5. $\lim_{x \rightarrow -5^+} \frac{x^2 + 2x - 15}{x^2 + 4x - 5}$</p> <p>6. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 2x}{2x^2 - 1}$</p> <p>7. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - 1}{x^3 - 1}$</p> | <p>8. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{ x + 2 }$</p> <p>9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - \cos x}{2 \cos^2 x - 3 \cos x + 1}$</p> <p>10. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 3x + 1 - x x - 3$</p> <p>11. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 - 3x + 1 - x x - 3$</p> |
|--|---|--|

Exercice 3. Fonctions exponentielle et logarithme :

- | | | |
|--|--|--|
| <p>1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln x - 1}{\ln x + 1}}$</p> <p>2. $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{\ln x - 1}{\ln x + 1}}$</p> <p>3. $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{e}} e^{\frac{\ln x - 1}{\ln x + 1}}$</p> <p>4. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + ax)^{\frac{1}{x}}, a > 0$</p> | <p>5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x\sqrt{x} \left(e^{\frac{1}{\sqrt{x+1}}} - e^{\frac{1}{\sqrt{x+2}}} \right)$</p> <p>6. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\ln x} \right)^{\ln(1/x)}$</p> <p>7. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(1 + \frac{1}{\ln x} \right)^{\ln(1/x)}$</p> <p>8. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + e^x)^{1/x}$</p> | <p>9. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(1+x)}{\ln x} \right)^{x \ln x}$</p> <p>10. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(\frac{x+1}{x} \right)$</p> <p>11. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos(x^2) + \ln(2x) - x^3}{3x^3 + \sin x - x}$</p> <p>12. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{x} \left(e^{\frac{1}{x+1}} - 1 \right)$</p> |
|--|--|--|

Exercice 4. Avec des racines :

- | | | |
|---|--|--|
| <p>1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2}}{x}$</p> <p>2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x + 2 - \sqrt{x^2 - 3x - 1}$</p> <p>3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{(x+1)^3} - \sqrt{x^3}$</p> <p>4. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+1)^3}$</p> | <p>5. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x-1}}{x-1}$</p> <p>6. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x - 3}}{x}$</p> <p>7. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 1} + x$</p> <p>8. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 - 5x + 1}}$</p> | <p>9. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{7+2x} - 3}{x^2 - 1}$</p> <p>10. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{\sqrt{x+7} - 3}$</p> <p>11. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x}$</p> <p>12. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}}{\sqrt[m]{x} - \sqrt[m]{a}},$
 $(n, m) \in \mathbb{N}^2$</p> |
|---|--|--|

Exercice 5. Fonctions trigonométriques :

- $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + 1}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \cos x}{x^2 + 1}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x^2 - \ln x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{\sqrt{1 - \cos(3x)}}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(6x)}{\tan(4x)}$
- $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{2 \cos x - 1}{2 \sin x - \sqrt{3}}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x - \sin x}{x}\right)^{x^2}$

Exercice 6. Avec la fonction partie entière.

- La fonction g définie sur \mathbb{R}^* par $g(x) = x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$ a-t-elle une limite en $+\infty$?
- La fonction h définie sur \mathbb{R}^* par $h(x) = \frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$ a-t-elle une limite en $+\infty$?
- Soient a et b strictement positifs. Calculer :

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{a} \left\lfloor \frac{b}{x} \right\rfloor$ (b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{b}{x} \left\lfloor \frac{x}{a} \right\rfloor$ (c) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{b}{x} \left\lfloor \frac{x}{a} \right\rfloor$

4. Étudier $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor\right)$.

Exercice 7. Avec des valeurs absolues. Soit f telle que $f(x) = \frac{|x - 3| - 2x}{4x - 6 - |x + 3|}$.

- Déterminer \mathcal{D}_f .
- Étudier l'existence d'une limite en $a = 3$, d'une limite à droite en 3 et d'une limite à gauche en 3.

II Calculs d'équivalents

Exercice 8. Donner la limite, ainsi qu'un équivalent au point considéré.

- $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1}$ en $+\infty$
- $f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}$ en $+\infty$
- $f(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$ en $+\infty$.
Discuter en fonction de a et de b .
- $f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2-1} + \frac{1}{x}$ en $+\infty$
- $f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2-1} + \frac{1}{x^4}$ en $+\infty$
- $f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2-1} - \frac{1}{x^4}$ en $+\infty$

Exercice 9. Donner la limite, ainsi qu'un équivalent au point considéré.

- $f(x) = \sqrt{x+5} - \sqrt{x-3}$ en $+\infty$
- $f(x) = \sqrt{1+x} - \sqrt{1+x^2}$ en $+\infty$ puis en 0
- $f(x) = \sqrt{\frac{x}{1+x}} - \sqrt{\frac{1+x}{x}}$ en 0 puis en $+\infty$.
- $f(x) = \sqrt{1 + \sqrt{x^2 + 1}}$ en $+\infty$.
- $f(x) = e^{\sqrt{x+2} - \sqrt{x}}$ en $+\infty$

Exercice 10. Donner la limite, ainsi qu'un équivalent au point considéré.

1. $f(x) = \ln x + \frac{1}{x}$ en 0^+
2. $f(x) = \frac{1 - e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x^x}}{e^{-x}}$ en $+\infty$
3. $f(x) = \frac{e^{ax} - 1}{x - x^2}$ en 0 puis en $+\infty$ ($a \in \mathbb{R}$)
4. $f(x) = \frac{x^\alpha \ln x}{x^x - 1}$ en 0^+ ($\alpha > 0$)
5. $f(x) = \frac{x^2 - 1}{\ln(x^2 - x + 1)}$ en 1
6. $f(x) = \frac{\sqrt{e^x - 1}}{x + \ln x - 1}$ en 0 puis en $+\infty$.
7. $f(x) = x(\ln(x+1) - \ln x)$ en $+\infty$
8. $f(x) = (x+1)(e^{\frac{1}{x}} - 1)$ en $+\infty$.
9. $f(x) = \ln\left(1 + \frac{a}{x}\right)$ en $+\infty$
10. $f(x) = (\ln x)^4 - \frac{x}{(\ln x)^2}$ en $+\infty$

Exercice 11. Donner la limite, ainsi qu'un équivalent au point considéré.

1. $f(x) = \frac{3^x - 1}{2^x - 1}$ en $x = 0$
2. $f(x) = 2^{x+1} - 2^x$ en $+\infty$
3. $f(x) = 2^{x^2+x} - 2^{x^2}$ en $+\infty$
4. $f(x) = (2^x)^x + 2^{x^2} + (4^x)^2$ en $+\infty$
5. $f(x) = (x+1)^x$ en $+\infty$
6. $f(x) = (x-1)^x$ en $+\infty$
7. $f(x) = (x+1)^x - x^x$ en $+\infty$

Exercice 12. Calculer la limite de f en $+\infty$ pour chacune des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \left(\frac{x}{x-a}\right)^x, a > 0$
2. $f(x) = \left(\frac{x+a}{x+b}\right)^x, (a, b) \in \mathbb{R}_+^2, a \neq b$
3. $f(x) = \left(\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\right)^x$

III Recherche de branches asymptotiques

Exercice 13. Soit f la fonction définie par $f : x \mapsto x - \ln(1+x)$. Le plan étant muni d'un repère orthonormé, \mathcal{C} désigne la courbe représentative de f .

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .
2. Étudier les limites aux bornes de son ensemble de définition.
3. Étudier la nature des branches infinies de \mathcal{C} et préciser la position relative de \mathcal{C} et de ses éventuelles asymptotes.

Exercice 14. Déterminer pour chacune des fonctions suivantes l'ensemble de définition ainsi que les asymptotes et les branches infinies. On étudiera de plus la position relative de la courbe associée à la fonction par rapport à ses asymptotes.

1. $f(x) = \frac{3x^2 - 4}{(x-2)^2(x+1)}$
2. $f(x) = x + \ln(2 - e^x)$
3. $f(x) = xe^{-x}$
4. $f(x) = x - \cos x$
5. $f(x) = \frac{\ln x - x^2 - 1}{x}$
6. $f(x) = \ln(\ln(x))$
7. $f(x) = x + \ln(x^2 - 1)$

IV Propriétés générales avec les limites

Exercice 15. Soit f une fonction réelle définie sur \mathbb{R} . On suppose que f est périodique de période T et que f admet une limite finie l quand x tend vers $+\infty$. Démontrer que f est la fonction constante de valeur l .

Exercice 16. Montrer que la fonction $x \mapsto \sin x + \cos x$ n'admet pas de limite en $+\infty$, ni en $-\infty$.