

# TD - 15 : Vocabulaire des applications

## I Images directe

**Exercice 1.** On considère l'application  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $x \mapsto x^3 - 3x$ .

1. Étudier les variations de  $f$ .
2. Déterminer  $f([1, 2])$ ,  $f(\mathbb{R})$ ,  $f([-1, +\infty[)$ .

**Exercice 2.**

1. Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction carrée. Déterminer  $f([-1, 2])$ .
2. Déterminer  $\sin\left(\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]\right)$ ,  $\tan\left(\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]\right)$  et  $\cos\left(\left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}\right]\right)$ .

**Exercice 3.** Soit  $f$  l'application de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{R}$  qui, à tout complexe associe son module. Calculer l'image directe par  $f$  de :

1.  $A = \{z \in \mathbb{C}, \exists x \in \mathbb{R}, z = x + 2i\}$
2.  $A = \{z \in \mathbb{C}, \exists x \in \mathbb{R}, z = (1 + \cos(x)) + i \sin(x)\}$ .

## II Injection, surjection, bijection sur des exemples concrets

**Exercice 4.** Étudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité des applications suivantes. Lorsqu'elles sont bijectives, déterminer les applications réciproques.

$$1. f : \begin{cases} \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{x} \end{cases}$$

$$7. f : \begin{cases} [-1, 1] \rightarrow [0, 1] \\ x \mapsto |x| \end{cases}$$

$$13. f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow ]1, +\infty[ \\ x \mapsto e^{-x} + 1 \end{cases}$$

$$2. f : \begin{cases} \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto \sqrt{x} \end{cases}$$

$$8. f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^3 \end{cases}$$

$$14. f : \begin{cases} ]-1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln(1+x) \end{cases}$$

$$3. f : \begin{cases} \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto x+1 \end{cases}$$

$$9. f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^4 \end{cases}$$

$$15. f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow ]-4, +\infty[ \\ x \mapsto 2^x - 4 \end{cases}$$

$$4. f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x+1 \end{cases}$$

$$10. f : \begin{cases} \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto x^4 \end{cases}$$

$$16. f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \\ x \mapsto \cos(x) + \sin(x) \end{cases}$$

$$5. f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto |x| \end{cases}$$

$$11. f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^5 \end{cases}$$

$$17. f : \begin{cases} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \\ n \mapsto 2n+1 \end{cases}$$

$$6. f : \begin{cases} \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto |x| \end{cases}$$

$$12. f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^n, n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

**Exercice 5.** Soit  $f : ]1, +\infty[ \rightarrow ]0, +\infty[$  telle que  $f(x) = x^2 - 1$ .  $f$  est-elle une bijection ?

**Exercice 6.** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ .

1. L'application  $f$  est-elle injective de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  ? Surjective de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  ?
2. Montrer que la restriction  $g : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$  est une bijection.

**Exercice 7.** Soit  $f$  définie par  $f(x) = \frac{x^2}{1-x}$ .

1. Étudier la fonction  $f$ . On note  $\mathcal{D}_f$  son domaine de définition.
2. L'application  $f$  est-elle injective de  $\mathcal{D}_f$  dans  $\mathbb{R}$ ? Surjective de  $\mathcal{D}_f$  dans  $\mathbb{R}$ ?
3. Montrer que la restriction  $g : [2, +\infty[ \rightarrow ]-\infty, -4]$  est une bijection.

**Exercice 8.** Soit  $f$  une application définie par  $f(x) = \frac{x-1}{1-2x}$ . Montrer que  $f$  est bijective de  $\mathcal{D}_f$  sur un sous ensemble de  $\mathbb{R}$  à déterminer et déterminer  $f^{-1}$ .

**Exercice 9.** Étudier la fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ . Sur quels intervalles  $f$  est-elle une bijection? Déterminer alors la bijection réciproque sur l'intervalle contenant 1.

**Exercice 10.** Montrer que l'application  $f : z \mapsto \frac{z+i}{z-i}$  est une bijection de  $\mathbb{C} \setminus \{i\}$  sur un sous ensemble à déterminer. Donner la bijection réciproque.

**Exercice 11.** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \max\left(\frac{x+5}{10}, x-3\right)$ . L'application  $f$  est-elle injective? Surjective? Bijective? Si oui, déterminer son application réciproque.

**Exercice 12.** Soit  $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (x+y, x-y) \end{cases}$ . Montrer que  $f$  est bijective et déterminer sa réciproque.

**Exercice 13.** Soit  $f : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{U}$  avec  $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$  définie par  $f(z) = \frac{z}{|z|}$  pour tout  $z \in \mathbb{C}^*$ .

1. Montrer que  $\forall u \in \mathbb{U}, f(u) = u$  et en déduire que  $f$  est surjective.
2. La fonction  $f$  est-elle injective?

### III Injection, surjection, bijection sur des exemples abstraits

**Exercice 14.** Montrer que la composée de deux injections est une injection et que la composée de deux surjections est une surjection.

**Exercice 15.** Soit  $E, F$  deux ensembles et  $f : E \rightarrow F$  et  $g : F \rightarrow E$  deux applications.

1. Montrer que si  $g \circ f = Id_E$ , alors  $g$  est surjective et  $f$  est injective.
2. Montrer que si  $f \circ g$  et  $g \circ f$  sont bijectives, alors  $f$  et  $g$  sont bijectives.

**Exercice 16.** Soient  $E, F$  et  $G$  trois ensembles. Soient  $f : E \rightarrow F$  et  $g : F \rightarrow G$  deux applications.

1. Montrer que si  $g \circ f$  est injective et  $f$  surjective alors  $g$  est injective.
2. Montrer que si  $g \circ f$  est surjective et  $g$  injective alors  $f$  est surjective.

**Exercice 17.** Soient  $E, F$  et  $G$  trois ensembles. Soient  $f : E \rightarrow F$  et  $g : E \rightarrow G$  deux applications. On considère l'application  $h$  définie par

$$h : \begin{cases} E & \rightarrow & F \times G \\ x & \mapsto & (f(x), g(x)). \end{cases}$$

1. Montrer que :  $(f \text{ est injective ou } g \text{ est injective}) \Rightarrow (h \text{ injective de } E \text{ dans } F \times G)$ .
2. On suppose que  $f$  est surjective de  $E$  dans  $F$  et que  $g$  est surjective de  $E$  dans  $G$ . L'application  $h$  est-elle nécessairement surjective de  $E$  dans  $F \times G$ ?

**Exercice 18.** Soit  $E$  un ensemble et  $f : E \rightarrow E$  une application telle que  $f \circ f \circ f = f$ . Montrer que  $f$  est injective si et seulement si  $f$  est surjective.