Correction TD - n :

I Calculs de limites

Correction 1. Je ne détaille pas tous les calculs.

1. **Calcul des limites aux bornes du domaine de définition de f avec $\mathbf{f(x) = e^{x^2+x+1}}$:**
   - Domaine de définition : La fonction f est toujours bien définie. Donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
   - Limite en $-\infty$: Par le théorème du monôme de plus haut degré, on a : $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2+x+1 = +\infty$. Donc par propriété sur la composition de limite, on obtient que : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.
   - Limite en $+\infty$: Par propriété sur les sommes et composée de limites, on obtient que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
2. **Calcul des limites aux bornes du domaine de définition de f avec $\mathbf{f(x) = e^{2x} - e^{x}}$:**
   - Domaine de définition : La fonction f est toujours bien définie. Donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
   - Limite en $-\infty$: Par propriété sur les composition et somme de limites, on obtient que : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$. Ainsi la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y=0$ au voisinage de $-\infty$.
   - Limite en $+\infty$: FI donc on met en facteur le terme dominant à savoir e^{2x}. On obtient que : $f(x) = e^{2x}(1-e^{-x})$. Puis par propriété sur les composition, somme et produit de limites, on obtient que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
3. **Calcul des limites aux bornes du domaine de définition de f avec $\mathbf{f(x) = \dfrac{e^{x}+x^2+x+1}{e^{2x}+1}}$:**
   - Domaine de définition : La fonction f est bien définie si $e^{2x}+1 \neq 0$: toujours vrai comme somme de deux termes strictement positifs. Donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
   - Limite en $-\infty$: Par le théorème du monôme de plus haut degré, on a : $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2+x+1 = +\infty$. Puis par propriété sur les composée, sommes et quotient de limites, on obtient que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.
   - Limite en $+\infty$: FI donc on met en facteur le terme dominant au numérateur (e^x) et au dénominateur e^{2x}. On obtient alors que par propriété sur les composée, sommes et quotient de limites $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Ainsi la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y=0$ au voisinage de $+\infty$.
4. **Calcul des limites aux bornes du domaine de définition de f avec $\mathbf{f(x) = \dfrac{x}{x-1}e^{\frac{1}{x}}}$:**
   - Domaine de définition : La fonction f est bien définie si $x-1\neq 0$ et $x \neq 0$. Donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$.
   - Limite en $-\infty$: Par le théorème du monôme de plus haut degré, on a : $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{x-1} = 1$. Donc par propriété sur les composée et produit de limites : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$. Ainsi la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y=1$ au voisinage de $-\infty$.
   - Limite en $+\infty$: Par le théorème du monôme de plus haut degré, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x-1} = 1$. Donc par propriété sur les composée et produit de limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$. Ainsi la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y=1$ au voisinage de $+\infty$.
   - Limite en 0^- : Par propriété sur les somme, quotients et composée de limites : $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = 0$.
   - Limite en 0^+ : FI. On fait apparaître une croissance comparée en posant $X = \dfrac{1}{x}$ et écrivant que : $f(x) = F(X) = \dfrac{e^X}{1-X}$. Quand x tend vers 0^+, X tend vers $+\infty$. Donc on a encore une FI. On fait alors apparaître une croissance comparée en écrivant que : $F(X) = \dfrac{e^X}{X} \times \dfrac{X}{1-X}$. Ainsi par croissance comparée : $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{e^X}{X} = +\infty$ et par théorème sur les monômes de plus haut degré, on a : $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{X}{1-X} = -\infty$. Ainsi par propriété sur le produit de limite, on a : $\lim\limits_{X\to+\infty} F(X) = -\infty$. Enfin par propriété sur

la composition de limite, on obtient que $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$. Ainsi la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 0^+$.

- Limite en 1^- : Par propriété sur les somme, quotients, composée et produit de limites, on a : $\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$. Ainsi la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 1^-$.
- Limite en 1^+ : Par propriété sur les somme, quotients, composée et produit de limites, on a : $\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$. Ainsi la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 1^+$.

5. **Calcul des limites aux bornes du domaine de définition de f avec $\mathbf{f(x) = e^{x^2} - e^{x+1}}$:**
   - Domaine de définition : La fonction f est toujours bien définie. Donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
   - Limite en $-\infty$: Par propriété sur les sommes et composées de limites, on obtient que $\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$.
   - Limite en $+\infty$: FI donc on met en facteur le terme dominant à savoir e^{x^2}. On obtient que $f(x) = e^{x^2}(1 - e^{-x^2+x+1})$. Par le théorème du monôme de plus haut degré, on a : $\lim_{x\to +\infty} -x^2 + x + 1 = -\infty$. Ainsi par propriété sur les sommes, composées etb produit de limites, on obtient que : $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$.

6. **Calcul des limites aux bornes du domaine de définition de f avec $\mathbf{f(x) = \ln\left(\frac{e^x+1}{e^x-1}\right)}$:**
   - Domaine de définition : La fonction f est bien définie si $\frac{e^x+1}{e^x-1} > 0$ et $e^x - 1 \neq 0$. Comme le numérateur est strictement positif comme somme de deux termes strictement positifs, on a : $\frac{e^x+1}{e^x-1} > 0 \Leftrightarrow e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 0$. Donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^{+\star}$.
   - Limite en 0^+ : Par propriété sur les sommes, quotient et composée de limites, on a : $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$. Ainsi la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$.
   - Limite en $+\infty$: FI donc on met en facteur le terme dominant au numérateur et au dénominateur à savoir e^x. On obtient alors $f(x) = \ln\left(\frac{1+e^{-x}}{1-e^{-x}}\right)$. Puis par propriétés sur les composées, sommes, quotient de limites, on obtient que : $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$. Ainsi la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ au voisinage de $+\infty$.

7. **Calcul des limites aux bornes du domaine de définition de f avec $\mathbf{f(x) = \ln\left(\frac{e^x+x^2}{2x+1}\right)}$:**
   - Domaine de définition : La fonction f est bien définie si $\frac{e^x+x^2}{2x+1} > 0$ et $2x+1 \neq 0$. Comme le numérateur est toujours strictement positif comme somme de deux nombres positifs dont l'un est strictement positif, on a : $\frac{e^x+x^2}{2x+1} > 0 \Leftrightarrow 2x+1 > 0$. Donc $\mathcal{D}_f = \left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$.
   - Limite en $-\frac{1}{2}^+$: Par propriété sur les sommes, quotient et composée de limites, on a : $\lim_{x\to -\frac{1}{2}^+} f(x) = +\infty$. Ainsi la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x = -\frac{1}{2}$.
   - Limite en $+\infty$: FI donc on met en facteur le terme dominant au numérateur et au dénominateur à savoir e^x au numérateur et x au dénominateur. On obtient que : $f(x) = \ln\left(\frac{e^x}{x} \times \frac{1+\frac{x^2}{e^x}}{2+\frac{1}{x}}\right)$. Par croissance comparée, on a : $\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ et $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$. Puis par propriété sur les sommes, quotients, produit et composée de limites, on obtient que $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$.

8. **Calcul des limites aux bornes du domaine de définition de f avec $\mathbf{f(x) = \ln\left(\frac{2-x}{x+4}\right)}$:**
   - Domaine de définition : La fonction f est bien définie si $\frac{2-x}{x+4} > 0$ et $x + 4 \neq 0$ (faire un tableau de signe). Donc $\mathcal{D}_f =]-4, 2[$.
   - Limite en -4^+ : Par propriété sur les sommes, quotient et composée de limites, on a : $\lim_{x\to -4^+} f(x) = +\infty$. Ainsi la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x = -4$.

- Limite en 2^- : Par propriété sur les sommes, quotient et composée de limites, on a : $\lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$. Ainsi la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 2$.

9. **Calcul des limites aux bornes du domaine de définition de f avec $\mathbf{f(x) = \dfrac{2^x}{x^2+1}}$:**
   - Domaine de définition : La fonction f est toujours bien définie car $x^2 + 1 \neq 0$ comme somme de deux termes positifs dont l'un est strictement positif. Donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
   - Limite en $-\infty$: Par propriété sur les produits, somme, composée et quotient de limites, on a : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$. Ainsi la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ au voisinage de $-\infty$.
   - Limite en $+\infty$: FI donc on fait apparaître une croissance comparée en mettant en facteur x^2 terme dominant au dénominateur. On obtient que $f(x) = \dfrac{e^{\ln 2x}}{x^2} \times \dfrac{1}{1+\frac{1}{x^2}}$. Par croissance comparée, on a : $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{e^{\ln 2x}}{x^2} = +\infty$. Puis par propriété sur les quotients, somme et produit de limites, on obtient que : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

10. **Calcul des limites aux bornes du domaine de définition de f avec $\mathbf{f(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x \ln x}$:**
    - Domaine de définition : La fonction f est bien définie si $x > 0$. Donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^{+\star}$.
    - Limite en 0^+ : Par propriété sur les produits et composée de limites, on a : $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$. La courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$.
    - Limite en $+\infty$: FI car $f(x) = \ln(x)e^{-x\ln 2}$. On va faire apparaître une croissance comparée en multipliant et divisant par x. On obtient que : $f(x) = \dfrac{x}{e^{\ln 2x}} \times \dfrac{\ln x}{x}$. Par croissances comparées, on a : $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^{\ln 2x}} = 0 = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x}$. Ainsi par propriété sur le produit de limite, on a : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Ainsi la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ au voisinage de $+\infty$.

11. **Calcul des limites aux bornes du domaine de définition de f avec $\mathbf{f(x) = \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{x^2}}$:**
    - Domaine de définition : La fonction f est bien définie si $x \geq 0$ et $x \neq 0$. Donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^{+\star}$.
    - Limite en 0^+ : Par propriété sur les composée et quotient de limites, on a : $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$. La courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$.
    - Limite en $+\infty$: FI donc on transforme l'expression afin de faire apparaître une croissance comparée. On pose par exemple $X = \sqrt{x}$ et on obtient que $f(x) = F(X) = \dfrac{e^X}{X^4}$. Ainsi par croissance comparée : $\lim_{X\to+\infty} F(X) = +\infty$. Puis par propriété sur la composition de limites : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

12. **Calcul des limites aux bornes du domaine de définition de f avec $\mathbf{f(x) = e^x - x^{\frac{2}{3}}}$:**
    - Domaine de définition : La fonction f est bien définie si $x > 0$ car $x^{\frac{2}{3}} = e^{\frac{2}{3}\ln x}$. Donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^{+\star}$.
    - Limite en 0^+ : Par propriété sur les produit, composée et somme de limites, on a : $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$.
    - Limite en $+\infty$: FI donc on met en facteur le terme dominant à savoir e^x. On obtient que : $f(x) = e^x\left(1 - \dfrac{x^{\frac{2}{3}}}{e^x}\right)$. Par croissance comparée, on a : $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^{\frac{2}{3}}}{e^x} = 0$. Puis par propriété sur les somme et produit de limites, on obtient que : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

13. **Calcul des limites aux bornes du domaine de définition de f avec $\mathbf{f(x) = e^{\frac{1}{x-2}}}$:**
    - Domaine de définition : La fonction f est bien définie si $x - 2 \neq 0$. Donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.
    - Par propriété sur les sommes, quotient et composée de limites, on a : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$, $\lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 0$.

14. **Calcul des limites aux bornes du domaine de définition de f avec $\mathbf{f(x) = (2x-1)e^{\frac{1}{x-2}}}$:**
    - Domaine de définition : La fonction f est bien définie si $x - 2 \neq 0$. Donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

- Par propriété sur les sommes, quotient, composée et produit de limites, on a : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 0$.

15. **Calcul des limites aux bornes du domaine de définition de f avec $\mathbf{f(x)} = \dfrac{\ln(\mathbf{x^2+1})}{\mathbf{x}}$:**
    - Domaine de définition : La fonction f est bien définie si $x^2+1>0$ et $x\neq 0$ La première inéquation est toujours vraie comme somme de deux termes positifs dont l'un est strictement positif. Donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^\star$.
    - Limite en $-\infty$: FI donc on met en facteur le terme dominant x^2 dans le logarithme afin de faire apparaître une croissance comparée. On obtient que : $f(x) = 2\dfrac{\ln|x|}{x} + \dfrac{\ln(1+\frac{1}{x^2})}{x}$. Par croissance comparée, on a : $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{\ln|x|}{x} = 0$ et par propriété sur les quotients, somme et composée de limites : $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{\ln(1+\frac{1}{x^2})}{x} = 0$. Donc par propriété sur les sommes de limites, on a : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$. La courbe $\mathcal{C}_f$ admet donc une asymptote horizontale d'équation $y=0$ au voisinage de $-\infty$.
    - Limite en $+\infty$: FI donc on met en facteur le terme dominant x^2 dans le logarithme afin de faire apparaître une croissance comparée. On obtient que : $f(x) = 2\dfrac{\ln x}{x} + \dfrac{\ln(1+\frac{1}{x^2})}{x}$. Par croissance comparée, on a : $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ et par propriété sur les quotients, somme et composée de limites : $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(1+\frac{1}{x^2})}{x} = 0$. Donc par propriété sur les sommes de limites, on a : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. La courbe $\mathcal{C}_f$ admet donc une asymptote horizontale d'équation $y=0$ au voisinage de $+\infty$.
    - Limite en 0 : FI donc on fait apparaître la limite connue suivante $\lim_{X\to 0} \dfrac{\ln(1+X)}{X} = 1$ en écrivant que : $f(x) = \dfrac{\ln(1+x^2)}{x^2} \times x$. On a ainsi d'après les limites usuelles et par composition que $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x^2)}{x^2} = 1$. Puis par propriété sur le produit de limites, on obtient que : $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

Correction 2. Avec des polynômes. Je ne donne ici que les résultats et l'idée d'une méthode possible pour obtenir la limite.

1. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^7+4x^2-1}{x^9+1} = 0$: théorème du monôme de plus haut degré.
2. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{x^7+x^2-x}{x^6+4x^2} = -\infty$: théorème du monôme de plus haut degré.
3. $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{x^7+x^2-x}{x^6+4x^2} = +\infty$: on met x en facteur puis propriété sur les limites.
4. $\lim_{x\to 1^-} \dfrac{3x^2+2x-5}{x^2+4x-5} = \dfrac{4}{3}$: on met $x-1$ en facteur puis propriété sur les limites.
5. $\lim_{x\to -5^+} \dfrac{x^2+2x-15}{x^2+4x-5} = \dfrac{4}{3}$: on met $x+5$ en facteur.
6. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{x^3-2x}{2x^2-1} = -\infty$: théorème du monôme de plus haut degré.
7. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^5-1}{x^3-1} = \dfrac{5}{3}$: on met $x-1$ en facteur puis propriété sur les limites ou on peut aussi reconnaître un taux d'accroissement.
8. $\lim_{x\to -2^+} \dfrac{x^3+8}{|x+2|} = 12$ et $\lim_{x\to -2^-} \dfrac{x^3+8}{|x+2|} = -12$: on met $x+2$ en facteur au numérateur puis propriété sur les limites.
9. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos^2 x - \cos x}{2\cos^2 x - 3\cos x + 1} = \lim_{X\to 1} \dfrac{X^2-X}{2X^2-3X+1} = 1$: on met $X-1$ en facteur puis propriété sur les limites.
10. $\lim_{x\to+\infty} x^2-3x+1-x|x-3| = 1$ car on peut prendre $x>3$ et par propriété de la valeur absolue.
11. $\lim_{x\to-\infty} x^2-3x+1-x|x-3| = +\infty$ car on peut prendre $x<3$ et par propriété de la valeur absolue.

Correction 3. Fonctions exponentielle et logarithme.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{\ln x-1}{\ln x+1}} = \lim\limits_{X\to+\infty} e^{\frac{X-1}{X+1}} = e$ par composition et le théorème sur le monôme de plus haut degré.

2. $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{\ln x-1}{\ln x+1}} = \lim\limits_{X\to-\infty} e^{\frac{X-1}{X+1}} = e$ par composition et le théorème sur le monôme de plus haut degré.

3. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{e}^+} e^{\frac{\ln x-1}{\ln x+1}} = \lim\limits_{X\to-1^+} e^{\frac{X-1}{X+1}} = 0$ et $\lim\limits_{x\to \frac{1}{e}^-} e^{\frac{\ln x-1}{\ln x+1}} = \lim\limits_{X\to-1^-} e^{\frac{X-1}{X+1}} = +\infty$ par composition et par propriété sur les limites. Il n'y a donc pas de limite en $\dfrac{1}{e}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}(1+ax)^{\frac{1}{x}} = e^a,\ a>0$: en utilisant par exemple $\ln(1+ax) \underset{0}{\sim} ax$ puis $\dfrac{1}{x}\ln(1+ax) \underset{0}{\sim} a$ et enfin en repassant aux limites pour pouvoir composer par l'exponentielle.

5. $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sqrt{x}\left(e^{\frac{1}{\sqrt{x+1}}} - e^{\frac{1}{\sqrt{x+2}}}\right)$. On a

$$x\sqrt{x}\left(e^{\frac{1}{\sqrt{x+1}}} - e^{\frac{1}{\sqrt{x+2}}}\right) = x\sqrt{x}e^{\frac{1}{\sqrt{x+1}}}\left(1-e^{\frac{1}{\sqrt{x+1}}-\frac{1}{\sqrt{x+2}}}\right) = x\sqrt{x}e^{\frac{1}{\sqrt{x+1}}}\left(1-e^{\frac{-1}{\sqrt{x+1}\sqrt{x+2}(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2})}}\right).$$

En utilisant l'équivalent usuel de l'exponentielle en 0 et par substitution, on obtient :

$$x\sqrt{x}\left(e^{\frac{1}{\sqrt{x+1}}} - e^{\frac{1}{\sqrt{x+2}}}\right) \underset{+\infty}{\sim} x\sqrt{x}e^{\frac{1}{\sqrt{x+1}}}\frac{-1}{\sqrt{x+1}\sqrt{x+2}(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2})} \underset{+\infty}{\sim} \frac{-x\sqrt{x}}{2x\sqrt{x}} \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2}.$$

On a utilisé ici aussi le fait que $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{\sqrt{x+1}}} = 1$ et qu'il est donc équivalent à 1 en $+\infty$.

6. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{\ln x}\right)^{\ln(1/x)} = e^{-1}$ en utilisant par exemple $\ln\left(1+\dfrac{1}{\ln x}\right) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\ln x}$ par substitution puis en multipliant par $\ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\ln x$ puis en repassant aux limites pour pouvoir composer par l'exponentielle.

7. $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(1+\dfrac{1}{\ln x}\right)^{\ln(1/x)} = 1$ en posant $X=\ln x$ qui tend vers 0^+ quand x tend vers 1^+ et en écrivant que : $\left(1+\dfrac{1}{\ln x}\right)^{\ln(1/x)} = e^{-X\ln\left(1+\frac{1}{X}\right)} = e^{-X\ln(X+1)+X\ln X}$ et en utilisant la croissance comparée et les propriétés sur les limites.

8. $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+e^x)^{1/x} = e$ en mettant le terme prépondérant e^x en facteur dans le logarithme népérien et en séparant avec $\ln(ab)=\ln a+\ln b$ puis propriétés sur les limites.

9. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)^{x\ln x}$. On a : $\left(\dfrac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)^{x\ln x} = e^{x\ln x\ln\left(\frac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)}$. Or on a

$$\ln\left(\frac{\ln(1+x)}{\ln(x)}\right) = \ln\left(\frac{\ln x+\ln(1+\frac{1}{x})}{\ln x}\right) = \ln\left(1+\frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\ln x}\right).$$

De plus, on a : $\dfrac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\ln x} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x\ln x}$ et cela tend vers 0 quand x tend vers l'infini. Ainsi, par substitution, on obtient :

$$\ln\left(1+\frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\ln x}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x\ln x}.$$

D'où : $x\ln x\ln\left(\frac{\ln(1+x)}{\ln x}\right) \underset{+\infty}{\sim} 1$ et en repassant au limite, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)^{x\ln x} = e$.

10. $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) = 1$ en utilisant par substitution que : $\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}$.

11. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cos(x^2)+\ln(2x)-x^3}{3x^3+\sin x-x} = -\dfrac{1}{3}$. On met en facteur x^3 au numérateur et au dénominateur car c'est le terme prépondérant puis on utilise une croissance comparée et le corollaire du théorème des gendarmes pour le cosinus et le sinus.

12. $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{x}\left(e^{\frac{1}{x+1}}-1\right) = 1$. On utilise par substitution l'équivalent usuel de l'exponentielle en 0 puis le théorème sur les monômes de plus haut degré.

Correction 4. Avec des racines.

1. $\lim_{x\to0^+} \frac{\sqrt{x^2}}{x} = \lim_{x\to0^+} \frac{|x|}{x} = 1$ et $\lim_{x\to0^-} \frac{\sqrt{x^2}}{x} = \lim_{x\to0^-} \frac{|x|}{x} = -1$ par propriété de la valeur absolue.
2. $\lim_{x\to+\infty} x+2-\sqrt{x^2-3x-1} = \frac{7}{2}$ quantité conjuguée puis on met en facteur le terme prépondérant x.
3. $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{(x+1)^3}-\sqrt{x^3} = +\infty$ en utilisant la quantité conjuguée et en mettant en facteur le terme prépondérant.
4. $\lim_{x\to-1^-} \frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{(x+1)^3} = +\infty$ et $\lim_{x\to-1^+} \frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{(x+1)^3} = -\infty$ en mettant sur le même dénominateur qui est $(x+1)^3$.
5. $\lim_{x\to1^+} \frac{\sqrt{x-1}}{x-1} = +\infty$ car en simplifiant par la racine en haut et en bas on obtient $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$.
6. $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+2x-3}}{x} = 1$ en mettant en facteur le terme prépondérant x^2 dans la racine et en le sortant de la racine.
7. $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+1}+x = 0$ en utilisant la quantité conjuguée.
8. $\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2-5x+1}} = 2$ en mettant en facteur en haut et en bas le terme prépondérant.
9. $\lim_{x\to1} \frac{\sqrt{7+2x}-3}{x^2-1} = \frac{1}{3}$ en utilisant la quantité conjuguée puis en mettant en facteur $x-1$ au numérateur et au dénominateur.
10. $\lim_{x\to2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+7}-3} = \frac{3}{2}$ en utilisant la quantité conjuguée pour le numérateur et pour le dénominateur.
11. $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x} = \frac{1}{2}$ en utilisant la quantité conjuguée et en mettant ensuite en facteur le terme prépondérant au dénominateur.
12. $\lim_{x\to a} \frac{\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a}}{\sqrt[m]{x}-\sqrt[m]{a}} = \frac{m}{n}\times\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[m]{a}}$ en faisant apparaître deux taux d'accroissements.

Correction 5. Avec des fonctions trigonométriques.

1. $\lim_{x\to0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ en utilisant l'encadrement du sinus et le théorème des gendarmes. Une première méthode consiste à distinguer 2 cas : $x>0$ et $x<0$.

   Pour tout $x\in\mathbb{R}^\star$: $-1\leq\sin\left(\frac{1}{x}\right)\leq1$.

   - Cas 1 : si $x>0$:
     On a alors comme $x>0$: $-1\leq\sin\left(\frac{1}{x}\right)\leq1 \Leftrightarrow -x\leq x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\leq x$. Puis comme $\lim_{x\to0^+} -x = \lim_{x\to0^+} x = 0$, le théorème des gendarmes assure que $\lim_{x\to0^+} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.
   - Cas 2 : si $x<0$:
     On a alors comme $x<0$: $-1\leq\sin\left(\frac{1}{x}\right)\leq1 \Leftrightarrow x\leq x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\leq -x$. Puis comme $\lim_{x\to0^-} -x = \lim_{x\to0^+} x = 0$, le théorème des gendarmes assure que $\lim_{x\to0^-} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

Comme $\lim_{x\to 0^+} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 = \lim_{x\to 0^-} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$, la limite en 0 existe bien et $\boxed{\lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0}$.
Une autre méthode, pour éviter d'avoir à faire des cas, consiste à encadrer la valeur absolue de l'expression. On a en effet, $\forall x \in \mathbb{R}^\star$:

$$0 \leq \left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \left|x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |x|.$$

Or $\lim_{x\to 0} |x| = 0$, donc par théorème des gendarmes, $\boxed{\lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0}$.

2. $\lim_{x\to 0} \sin x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ en utilisant l'encadrement du sinus et le théorème des gendarmes. On a en effet :

$$0 \leq \left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \left|\sin x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |\sin x|.$$

Or $\lim_{x\to 0} |\sin x| = 0$, donc par théorème des gendarmes, $\boxed{\lim_{x\to 0} \sin x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0}$.

3. $\lim_{x\to +\infty} \frac{x\sin x}{x^2+1} = 0$ en utilisant l'encadrement du sinus et le théorème des gendarmes :

$$-1 \leq \sin(x) \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{x}{x^2+1} \leq \frac{x\sin x}{x^2+1} \leq \frac{x}{x^2+1}$$

car $\frac{x}{x^2+1} > 0$ car on calcule la limite en $+\infty$. De plus $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2+1} = 0 = \lim_{x\to+\infty} -\frac{x}{x^2+1}$ d'après le théorème du monôme de plus haut degré. On obtient alors bien que $\lim_{x\to+\infty} \frac{x\sin x}{x^2+1} = 0$ en utilisant le théorème des gendarmes.

4. $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\cos x}{x^2+1}$ PAS DE LIMITE. Prendre $u_n = 2n\pi$ et $v_n = 2n\pi + \pi$.

5. $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x^2 - \ln x} = 0$ en utilisant l'encadrement du sinus et le théorème des gendarmes.
On commence par trouver un équivalent du dénominateur : on a $x^2 - \ln x \underset{+\infty}{\sim} x^2$ car $\frac{x^2-\ln x}{x^2} = 1 - \frac{\ln x}{x^2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ par théorème des croissances comparées.
On encadre ensuite l'équivalent obtenu :

$$-1 \leq \sin(x) \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{x^2} \leq \frac{\sin x}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}.$$

De plus $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0 = \lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{x^2}$. On obtient alors bien que $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x^2} = 0$ en utilisant le théorème des gendarmes, puis que $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x^2-\ln x} = 0}$.

6. $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{2}$. Il faut transformer l'expression par les formules trigonométriques pour lever l'indétermination. On a

$$\frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \frac{\sin x}{x} \times \frac{1-\cos x}{x^2\cos x} = \frac{\sin x}{x} \times \frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2} \times \frac{1}{\cos x} = \frac{\sin x}{x} \times \left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right)^2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{\cos x}.$$

En reconnaissant des limites usuelles, on obtient le résultat.

7. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{\sqrt{1-\cos(3x)}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$ en utilisant les équivalents usuels en 0. On peut bien passer à la racine dans un équivalent car c'est une puissance.

8. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(6x)}{\tan(4x)} = \frac{3}{2}$ en utilisant les équivalents usuels en 0.

9. $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{2\cos x - 1}{2\sin x - \sqrt{3}} = -\sqrt{3}$ en mettant 2 en facteur et en reconnaissant deux taux d'accroissements.

10. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x-\sin x}{x}\right)^{x^2}$. On a

$$\left(\frac{\tan x-\sin x}{x}\right)^{x^2}=e^{x^2\ln\left(\frac{\tan x-\sin x}{x}\right)}=e^{x^2\ln\left(\frac{\tan x}{x}(1-\cos x)\right)}=e^{x^2\ln\left(\frac{\tan x}{x}\right)}\times e^{x^2\ln(1-\cos x)}.$$

De plus, on sait que : $1-\cos x\underset{0}{\sim}\frac{x^2}{2}$. On ne peut pas composer par le logarithme, donc on utilise le raisonnement suivant :

$$x^2\ln(1-\cos x)=x^2\ln\left(\frac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}}\times\frac{x^2}{2}\right)=x^2\ln\left(\frac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}}\right)+x^2\ln\left(\frac{x^2}{2}\right).$$

Or on a $\lim_{x\to 0}x^2\ln\left(\frac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}}\right)=0$, et par croissance comparée, $\lim_{x\to 0}x^2\ln\left(\frac{x^2}{2}\right)=0$. Comme on a aussi en utilisant une limite usuelle et les propriétés sur les produit et composée de limites : $\lim_{x\to 0}x^2\ln\left(\frac{\tan x}{x}\right)=0$, on obtient finalement que : $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x-\sin x}{x}\right)^{x^2}=1$.

Correction 6. Partie entière :

1. On remarque que, pour $x>1$, la fonction g est nulle. En effet : $\forall x>1,\quad 0<\frac{1}{x}<1$ et donc : $\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor=0$. Ainsi, la fonction g admet une limite en $+\infty$ qui est nulle.
2. Par le même raisonnement que ci-dessus, on sait que : $\forall x>1,\quad h(x)=\frac{1}{x}$. Ainsi, on obtient que : $\lim_{x\to+\infty}h(x)=0$.
3. (a) On utilise ici l'inégalité caractéristique de la partie entière, à savoir :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad x-1<\lfloor x\rfloor\leq x.$$

   - Ainsi, pour $x>0$, on otient : $\frac{b}{a}-\frac{x}{a}<\frac{x}{a}\left\lfloor\frac{b}{x}\right\rfloor\leq\frac{b}{a}$. Et ainsi par le théorème des gendarmes, on a : $\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{a}\left\lfloor\frac{b}{x}\right\rfloor=\frac{b}{a}$.
   - Et pour $x<0$, on obtient que : $\frac{b}{a}<\frac{x}{a}\left\lfloor\frac{b}{x}\right\rfloor\leq\frac{b}{a}-\frac{x}{a}$. Et ainsi par le théorème des gendarmes, on a : $\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{a}\left\lfloor\frac{b}{x}\right\rfloor=\frac{b}{a}$.

   Ainsi la limite en 0 existe et vaut $\frac{b}{a}$.

   (b) Par définition de la partie entière, on a, comme $a>0$: $\forall x\in]0,a[,\quad\left\lfloor\frac{x}{a}\right\rfloor=0\Rightarrow\forall x\in]0,a[,\quad\frac{b}{x}\left\lfloor\frac{x}{a}\right\rfloor=0$. Ainsi, la limite en 0^+ existe et vaut 0.

   (c) Par définition de la partie entière, on a, comme $a>0$: $\forall x\in]-a,0[,\quad\left\lfloor\frac{x}{a}\right\rfloor=-1\Rightarrow\forall x\in]-a,0[,\quad\frac{b}{x}\left\lfloor\frac{x}{a}\right\rfloor=-\frac{b}{x}$. Ainsi : $\lim_{x\to 0^-}\frac{b}{x}\left\lfloor\frac{x}{a}\right\rfloor=+\infty$ car $b>0$.
4. On utilise l'inégalité caractéristique de la partie entière et on obtient :

$$\forall x\in\mathbb{R}^\star,\qquad\frac{1}{x}-1<\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor\leq\frac{1}{x}.$$

   On distingue alors les cas $x>0$ et $x<0$ et on obtient

- Cas $x > 0$: on a :

$$\begin{array}{llll} 1-x & < & x\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor & \leq 1 \\ -1 & \leq & -x\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor & < x-1 \\ 0 & \leq & 1-x\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor & < x. \end{array}$$

  Ainsi, d'après le théorème des gendarmes, on obtient que : $\lim_{x\to 0^+} 1-x\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 0$.
- Cas $x < 0$: on a par le même type de raisonnement que :

$$x < 1-x\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leq 0.$$

  Ainsi toujours par le théorème des gendarmes, on obtient que : $\lim_{x\to 0^-} 1-x\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 0$.

Ainsi la limite à gauche et à droite étant la même, on obtient que : $\lim_{x\to 0} 1-x\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 0$.

Correction 7. Étude d'une fonction :

1. La fonction f est bien définie si $4x-6-|x+3| \neq 0$. Comme toujours avec la valeur absolue, on doit étudier des cas :
   - Si $x+3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -3$, on a alors :
   $$4x-6-|x+3| = 0 \Leftrightarrow 4x-6-x-3 = 0 \Leftrightarrow x = 3.$$
   Ainsi, comme on a bien $3 \geq -3$, 3 est une valeur interdite pour f.
   - Si $x+3 < 0 \Leftrightarrow x < -3$, on a alors :
   $$4x-6-|x+3| = 0 \Leftrightarrow 4x-6-(-x-3) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{5}.$$
   Or $\frac{3}{5} > -3$ donc $\mathcal{S} = \emptyset$ pour ce cas là.

   Ainsi, on obtient que :
   $$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}.$$
2. Regardons pour cela ce que vaut f au voisinage de 3, par exemple sur l'intervalle $[2,4]\setminus\{3\}$. Sur cet intervalle, on a : $x+3 \geq 0$ et ainsi, on sait déjà que :
   $$\forall x \in [2,4]\setminus\{3\}, \quad f(x) = \frac{|x-3|-2x}{3(x-3)}.$$
   On doit alors étudier deux cas :
   - Si $x \in [2,3[$, alors $x-3 < 0$ et on obtient sur cet intervalle :
   $$f(x) = \frac{-x+3-2x}{3(x-3)} = \frac{-3(x-3)}{3(x-3)} = -1.$$
   Ainsi, sur cet intervalle f est constante égale à -1 et ainsi : $\lim_{x\to 3^-} f(x) = -1$.
   - Si $x \in]3,4]$, alors $x-3 > 0$ et on obtient sur cet intervalle :
   $$f(x) = \frac{x-3-2x}{3(x-3)} = \frac{-(x+3)}{3(x-3)}.$$
   Ainsi, on obtient par propriétés sur les quotient de limite que : $\lim_{x\to 3^+} f(x) = -\infty$.

   La fonction f n'admet pas de limite en 3. Elle n'est pas prolongeable par continuité en 3, elle est prolongeable par continuité à gauche en 3 mais pas à droite en 3.

II Calculs d'équivalents

Correction 8. Je ne donne ici que l'équivalent et les idées de la démonstration. Le calcul de la limite se déduit très facilement à partir de l'équivalent.
QUELQUES RAPPELS :

- On ne somme pas et on ne compose pas des équivalents (mais on peut les mettre à la puissance).
- Dès que vous n'êtes pas sûr, repassez à la limite en divisant et vérifiez que la limite tend bien vers 1.
- Si vous voyez ce que va être l'équivalent mais que vous n'arrivez pas à le montrer par les règles de calcul usuels sur les équivalents, repassez à la limite et montrez que cela tend vers 1.

1. $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x-1}$. on a $f(x) \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{x^2}$ en mettant au même dénominateur.
2. $f(x) = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x^3}$. On a $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^2}$ en mettant au même dénominateur.
3. $f(x) = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x+1}$. On peut supposer que a et b non tous les deux nuls sinon la fonction f est la fonction nulle. On a alors en mettant au même dénominateur que : $f(x) = \dfrac{(a+b)x+a}{x(x+1)}$. Ainsi, si $a+b \neq 0$, alors $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{a+b}{x}$. Si $a+b=0$ avec $(a,b) \neq (0,0)$ alors $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{a}{x^2}$.
4. $f(x) = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x^2-1} + \dfrac{1}{x}$. On a $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}$ en mettant au même dénominateur.
5. $f(x) = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x^2-1} + \dfrac{1}{x^4}$. On a $f(x) \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{x^6}$ en mettant au même dénominateur.
6. $f(x) = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x^2-1} - \dfrac{1}{x^4}$. On a $f(x) \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{2}{x^4}$ en mettant au même dénominateur.

Correction 9.

1. $f(x) = \sqrt{x+5} - \sqrt{x-3} = \dfrac{8}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x-3}}$ en utilisant la quantité conjuguée. Ainsi, $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{4}{\sqrt{x}}$ (en mettant en facteur $\sqrt{x}$ au dénominateur).
2. $f(x) = \sqrt{1+x} - \sqrt{1+x^2} = \dfrac{x-x^2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}}$ en utilisant la quantité conjuguée. En mettant en facteur le terme prépondérant x^2 dans la racine au dénominateur, on obtient $f(x) \underset{+\infty}{\sim} -x$.
3. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{1+x}} - \sqrt{\dfrac{1+x}{x}}$. On a $f(x) \underset{0}{\sim} -\dfrac{1}{\sqrt{x}}$. Puis, au voisinage de $+\infty$, on utilise la quantité conjuguée et on obtient $f(t) = \dfrac{-2x-1}{x(1+x)\left(\sqrt{\frac{x}{1+x}} + \sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)}$ d'où $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{-2x}{2x^2} \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{x}$.
4. $f(x) = \sqrt{1+\sqrt{x^2+1}}$. $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{x}$ en mettant en facteur le terme prépondérant x^2.
5. $f(x) = e^{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}} = e^{\frac{2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}}$ en utilisant la quantité conjuguée. Ainsi, on obtient que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ par propriété sur les composée, quotient de limites. On a donc, la limite étant finie et non nulle : $f(x) \underset{+\infty}{\sim} 1$.

Correction 10.

1. $f(x) = \ln x + \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x}(1 + x\ln x)$. D'où par croissance comparée, on obtient : $f(x) \underset{0^+}{\sim} \dfrac{1}{x}$.
2. $f(x) = \dfrac{1 - e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x^x}}{e^{-x}}$. On peut montrer, en repassant à la limite que : $\dfrac{1}{x^x} = \underset{+\infty}{o}\, 1 - e^{\frac{1}{x}}$ donc $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1-e^{\frac{1}{x}}}{e^{-x}} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{-\frac{1}{x}}{e^{-x}} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{-1}{xe^{-x}}$.

3. $f(x) = \dfrac{e^{ax}-1}{x-x^2} = \dfrac{e^{ax}-1}{x(1-x)}$ donc $f(x) \underset{0}{\sim} a$ par les équivalents usuels. De plus, comme $1 = \underset{+\infty}{o}(e^{ax})$ si $a>0$, on a si $a>0$, $f(x) \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{e^{ax}}{x^2}$. Et si $a<0$, alors $e^{ax} = \underset{+\infty}{o}(1)$ et alors $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^2}$.
4. $f(x) = \dfrac{x^\alpha \ln x}{x^x - 1}$. Comme $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0$ par croissance comparée, on a, par substitution : $x^x - 1 \underset{0^+}{\sim} x\ln x$ et ainsi $f(x) \underset{0^+}{\sim} x^{\alpha-1}$.
5. $f(x) = \dfrac{x^2-1}{\ln(x^2-x+1)} = \dfrac{(x-1)(x+1)}{\ln(1+x(x-1))}$ donc $f(x) \underset{1}{\sim} \dfrac{2(x-1)}{x(x-1)} \underset{1}{\sim} 2$. On utilise une substitution et l'équivalent usuel en 0 du logarithme népérien.
6. $f(x) = \dfrac{\sqrt{e^x-1}}{x+\ln x - 1}$. Comme au voisinage de 0 $x-1$ est négligeable devant $\ln x$, on a : $f(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{\sqrt{x}}{\ln x}$. Comme au voisinage de $+\infty$, 1 est négligeable devant e^x et $\ln x$ et -1 sont négligeables devant x, on a : $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{e^x}}{x}$.
7. $f(x) = x(\ln(x+1) - \ln x) = x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ donc $f(x) \underset{+\infty}{\sim} x \times \dfrac{1}{x} \underset{+\infty}{\sim} 1$.
8. $f(x) = (x+1)(e^{\frac{1}{x}}-1)$. On a $f(x) \underset{+\infty}{\sim} x \times \dfrac{1}{x} \underset{+\infty}{\sim} 1$.
9. $f(x) = \ln\left(1+\dfrac{a}{x}\right)$. On a $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{a}{x}$.
10. $f(x) = (\ln x)^4 - \dfrac{x}{(\ln x)^2} = \dfrac{(\ln x)^6 - x}{(\ln x)^2}$. On a $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{-x}{(\ln x)^2}$ car, par croissance comparée, $(\ln x)^6$ est négligeable devant x au voisinage de $+\infty$.

Correction 11.

1. $f(x) = \dfrac{3^x-1}{2^x-1}$. En passant par l'exponentielle, on a : $f(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{x\ln 3}{x\ln 2} \underset{0}{\sim} \dfrac{\ln 3}{\ln 2}$.
2. $f(x) = 2^{x+1} - 2^x = 2^x(2-1) = 2^x$. On a donc $f(x) \underset{+\infty}{\sim} 2^x$.
3. $f(x) = 2^{x^2+x} - 2^{x^2} = 2^{x^2+x}\left(1 - \dfrac{1}{2^x}\right)$. On a donc $f(x) \underset{+\infty}{\sim} 2^{x^2+x}$.
4. $f(x) = e^{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}} = e^{\frac{2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}}$ en utilisant la quantité conjuguée. Ainsi, on obtient que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ par propriété sur les composée, quotient de limites. On a donc, la limite étant finie et non nulle : $f(x) \underset{+\infty}{\sim} 1$.
5. $f(x) = (2^x)^x + 2^{x^2} + (4^x)^2 = (4^x)^2 = 2\times 2^{x^2} + 16^x$ car $(2^x)^x = 2^{x^2}$ (repasser à la définition avec l'exponentielle si vous ne voyez pas). Ainsi, en mettant en facteur le terme prépondérant 2^{x^2}, on obtient que : $f(x) = e^{x^2\ln 2}\left(2 + e^{-x^2(\ln 2 - \frac{\ln 16}{x})}\right)$ et le terme entre parenthèse tend vers 2 quand x tend vers $+\infty$. Ainsi, on obtient que : On a donc $f(x) \underset{+\infty}{\sim} 2\times 2^{x^2}$.
6. $f(x) = (x+1)^x = e^{x\ln(1+x)} = e^{x\ln x} \times e^{x\ln(1+\frac{1}{x})} = x^x \times e^{x\ln(1+\frac{1}{x})}$. On a déjà montré que : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x\ln(1+\frac{1}{x})} = e$ qui est une limite finie et ainsi $e^{x\ln(1+\frac{1}{x})} \underset{+\infty}{\sim} e$. Puis par produit d'équivalents, on obtient que : $f(x) \underset{+\infty}{\sim} ex^x$.
7. $f(x) = (x-1)^x$. On a par la même méthode que ci-dessus : $f(x) \underset{+\infty}{\sim} e^{-1}x^x$.
8. $f(x) = (x+1)^x - x^x = e^{x\ln(1+x)} - e^{x\ln x} = x^x\left(e^{x\ln(1+\frac{1}{x})} - 1\right)$ en utilisant la même transformation que ci-dessus. Puis, on peut montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x\ln(1+\frac{1}{x})} - 1 = e-1$ qui est finie non nulle et ainsi, on a : $e^{x\ln(1+\frac{1}{x})} - 1 \underset{+\infty}{\sim} e-1$. On a donc $f(x) \underset{+\infty}{\sim} (e-1)x^x$.

Correction 12.

1. $f(x)=\left(\dfrac{x}{x-a}\right)^x$:
   On écrit que : $f(x)=e^{x\ln\left(\frac{x}{x-a}\right)}=e^{-x\ln\left(\frac{x-a}{x}\right)}=e^{-x\ln\left(1-\frac{a}{x}\right)}$. Puis en utilisant la substitution et l'équivalent usuel du logarithme en 0, on obtient que : $-x\ln\left(1-\dfrac{a}{x}\right)\underset{+\infty}{\sim}a$. Puis, comme on ne peut PAS composer par l'exponentielle, on repasse aux limites et par composition de limite, on obtient que :
$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=e^a.$$
2. $f(x)=\left(\dfrac{x+a}{x+b}\right)^x$, $(a,b)\in\mathbb{R}_+^2$, $a\neq b$:
   On a : $f(x)=e^{x\ln\left(\frac{x+a}{x+b}\right)}=e^{x\ln\left(\frac{x+b+a-b}{x+b}\right)}=e^{x\ln\left(1+\frac{a-b}{x+b}\right)}$. Puis par substitution, on a :
$$\ln\left(1+\frac{a-b}{x+b}\right)\underset{+\infty}{\sim}\frac{a-b}{x+b}$$
   car $a\neq b$. Puis, on obtient que : $x\ln\left(\frac{x+b+a-b}{x+b}\right)\underset{+\infty}{\sim}a-b$. Et ensuite, en repassant aux limites, on obtient que :
$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=e^{a-b}.$$
3. $(x)=\left(\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\right)^x$:
   On a :
$$f(x)=e^{x\ln\left(\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\right)}=e^{x\ln\left(\frac{x^2-x+1+2x}{x^2-x+1}\right)}=e^{x\ln\left(1+\frac{2x}{x^2-x+1}\right)}.$$
   Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x^2-x+1}=0$ par le théorème sur les monômes de plus haut degré, on a par substitution que
$$\ln\left(1+\frac{2x}{x^2-x+1}\right)\underset{+\infty}{\sim}\frac{2x}{x^2-x+1}\underset{+\infty}{\sim}\frac{2}{x}.$$
   Puis, on obtient que : $x\ln\left(1+\dfrac{2x}{x^2-x+1}\right)\underset{+\infty}{\sim}2$. En repassant aux limites, on a donc :
$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=e^2.$$

III Recherche de branches asymptotiques

Correction 13. Étude des branches infinies :

1. La fonction f est définie si $1+x>0$ c'est-à-dire si $x>-1$. Ainsi, on obtient que : $\mathcal{D}_f=]-1,+\infty[$.
2. Étude des limites aux bornes de son ensemble de définition :
   - Étude en -1 :
     Par propriété sur les composée et somme de limite, on a : $\displaystyle\lim_{x\to-1}f(x)=+\infty$. Ainsi, la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x=-1$.
   - Étude en $+\infty$:
     On met le terme prépondérant x en facteur et on obtient, pour $x>0$ que :
$$f(x)=x\left(1-\frac{\ln(1+x)}{x}\right).$$
     Par croissance comparée en écrivant que : $\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\dfrac{\ln(1+x)}{1+x}\times\dfrac{1+x}{x}$, on obtient que : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x}=0$. Ainsi, par propriété sur les somme et produit de limites, on a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

3. Étude de la branche infinie au voisinage de $+\infty$:

   - Étude de la limite en $+\infty$ de $\dfrac{f(x)}{x}$:
     Pour tout $x > 0$, on a : $\dfrac{f(x)}{x} = 1 - \dfrac{\ln(1+x)}{x}$. On a déjà vu que : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 0$ ainsi, on obtient que : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$ par propriété sur la somme de limite.
   - Étude de la limite de $f(x) - x$ au voisinage de $+\infty$:
     Par définition de f, on a :
     $$f(x) - x = -\ln(1+x).$$
     Ainsi par propriété sur la composé de limite, on obtient que :
     $$\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = -\infty.$$
     Ainsi la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une branche parabolique de direction asymptotique la droite d'équation $y = x$.

Correction 14. Étude des branches infinies de différentes fonctions :

1. $f(x) = \dfrac{3x^2 - 4}{(x-2)^2(x+1)}$
   - $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$.
   - Étude en $-\infty$ et en $+\infty$:
     D'après le théorème sur les monômes de plus haut degré, on obtient que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.
     Ainsi la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ au voisinage de $-\infty$ et de $+\infty$.
   - Étude en 2 :
     Par propriété sur les composé, produit et quotient de limites, on obtient que $\lim\limits_{x\to2^+} f(x) = +\infty = \lim\limits_{x\to2^-} f(x)$. Ainsi, la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 2$.
   - Étude en -1 :
     Par propriétés sur les composé, produit et quotient de limites, on obtient que $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-}$
     $+\infty$. Ainsi, la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x = -1$.
2. $f(x) = x + \ln(2 - e^x)$
   - $\mathcal{D}_f =]-\infty, \ln 2[$.
   - Étude en $\ln 2$:
     Par propriété sur les composée et somme de limites, on a : $\lim\limits_{x\to\ln 2} f(x) = -\infty$. Ainsi la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x = \ln 2$.
   - Étude en $-\infty$:
     Par propriété sur les composée et somme de limites, on obtient que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. Recherche de branche infinie :
     - ⋆ Étude de $\dfrac{f(x)}{x}$ pour $x < 0$:
       On a : $\dfrac{f(x)}{x} = 1 + \dfrac{\ln(2 - e^x)}{x}$. Par propriété sur les composée, quotient et somme de limites, on obtient que $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$.
     - ⋆ Étude de $f(x) - x$:
       Par propriété sur les composée de limites, on a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - x = \ln 2$.

     Ainsi, la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote oblique d'équation $y = x + \ln 2$ au voisinage de $-\infty$.
   - Position de la courbe par rapport à son asymptote oblique :
     On étudie pour cela le signe de $f(x) - x - \ln 2$ sur l'intervalle $]-\infty, \ln 2[$. On a :
     $$f(x) - x - \ln 2 = \ln(2 - e^x) - \ln 2 = \ln\left(1 - \frac{e^x}{2}\right).$$

Or pour tout $x \in]-\infty, \ln 2[$, on a : $1 - \dfrac{e^x}{2} < 1$ car l'exponentielle est toujours positive et ainsi, on a

$$\forall x \in]-\infty, \ln 2[, \qquad f(x) - x - \ln 2 < 0.$$

Ainsi la courbe $\mathcal{C}_f$ est en dessous de son asymptote oblique sur $\mathcal{D}_f$.

3. $f(x) = xe^{-x}$
   - $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
   - Étude en $+\infty$:
     Par croissance comparée, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$. Ainsi la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asyptote horizontale d'équation $y = 0$ au voisinage de $+\infty$.
     Étude de la position de la courbe par rapport à cette asymptote horizontale :
     On a : $f(x) - 0 = xe^{-x}$. L'exponentielle étant toujours positive, on obtient que la courbe $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de son asymptote $y = 0$ sur $\mathbb{R}^+$ et en-dessous sur $\mathbb{R}^-$.
   - Étude en $-\infty$:
     Par propriété sur les composée et produit de limites, on a : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$. Étude de sa branche infinie :
     Pour tout $x < 0$, on a : $\dfrac{f(x)}{x} = e^{-x}$ et ainsi par propriété sur la composée de limite, on obtient que $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$. Ainsi la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une branche parabolique de direction asymptotique l'axe des ordonnées.
4. $f(x) = x - \cos x$
   - $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
   - Étude en $+\infty$ et en $-\infty$:
     Pour $x > 0$, on a : $f(x) = x\left(1 - \dfrac{\cos x}{x}\right)$. Puis, en utilisant un encadrement du cosinus et le théorème des gendarmes, on obtient que :

     $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty.$$

   - Étude des branches infinies :
     - ⋆ Étude de $\dfrac{f(x)}{x}$:
       Pour tout $x \neq 0$, on a $\dfrac{f(x)}{x} = 1 - \dfrac{\cos x}{x}$. Ainsi, on obtient que

       $$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}.$$

     - ⋆ Étude de $f(x) - x$:
       Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $f(x) - x = -\cos x$ et la fonction cosinus n'a pas de limite en l'infini. Ainsi, on ne peut rien dire sur les branches infinies.
5. $f(x) = \dfrac{\ln x - x^2 - 1}{x}$
   - $\mathcal{D}_f =]0, +\infty[$.
   - Étude en 0 :
     Par propriété sur les somme et quotient de limites, on a $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$. Ainsi, la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$.
   - Étude en $+\infty$:
     On remarque que : $\forall x > 0, \qquad f(x) = \dfrac{\ln x}{x} - x - \dfrac{1}{x}$. Ainsi, par croissance comparée et par propriété sur les sommes de limite, on obtient que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.
   - Étude de la branche infinie au voisinage de $+\infty$:
     - ⋆ Étude de $\dfrac{f(x)}{x}$:
       Soit $x > 0$, on a : $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{\ln x}{x^2} - 1 - \dfrac{1}{x^2}$. Ainsi, par croissance comparée et par propriété sur les sommes de limites, on obtient que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -1$.

- ⋆ Étude de $f(x)+x$:
  Soit $x>0$, on a : $f(x)+x=\dfrac{\ln x}{x}-\dfrac{1}{x}$. Ainsi, par croissance comparée et par propriété sur les sommes de limites, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)+x=0$. Ainsi, la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote oblique d'équation $y=-x$ au voisinage de $+\infty$.
- ⋆ Étude de la position de la courbe par rapport à cette asymptote sur $\mathbb{R}^{+\star}$:
  On a pour $x>0$: $f(x)+x=\dfrac{\ln x-1}{x}$. Comme on est sur $\mathbb{R}^{+\star}$, il suffit juste de regarder le signe de $\ln x-1$. On obtient ainsi que $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de la droite d'équation $y=-x$ sur $[e,+\infty[$ et elle est en-dessous sur $]0,e]$.

6. $f(x)=\ln(\ln(x))$
   - Il faut $x>0$ et $\ln x>0$. On obtient ainsi $\mathcal{D}_f=]1,+\infty[$.
   - Étude en 1 :
     Par propriété sur la composition de limite, on obtient que $\lim\limits_{x\to 1}\ln(\ln x)=-\infty$. Ainsi, la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x=1$.
   - Étude en $+\infty$:
     Par propriété sur la composition de limite, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.
   - Recherche d'asymptote oblique :
     On pose $X=\ln x \Leftrightarrow x=e^X$ et on obtient
     $$\forall x>1,\quad \frac{f(x)}{x}=\frac{\ln X}{e^X}=\frac{\ln X}{X}\times\frac{X}{e^X}.$$
     Par croissances comparées, on obtient que : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{\ln X}{e^X}=0$. Ainsi la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une branche parabolique de direction asymptotique l'axe des abscisses.

7. $f(x)=x+\ln(x^2-1)$
   - $\mathcal{D}_f=]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$.
   - Étude en -1 :
     Par propriété sur la composée et la somme de limites, on obtient $\lim\limits_{x\to-1} f(x)=-\infty$. La courbe $\mathcal{C}_f$ admet ainsi une asymptote verticale d'équation $x=-1$.
   - Étude en 1 :
     Par propriété sur la composée et la somme de limites, on obtient $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=-\infty$. La courbe $\mathcal{C}_f$ admet ainsi une asymptote verticale d'équation $x=1$.
   - Étude en $+\infty$:
     Par propriété sur les composé et somme de limites, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$. Recherche d'asymptote oblique au voisinage de $+\infty$:
     - ⋆ Étude de $\dfrac{f(x)}{x}$:
       Soit $x>1$, on a, en mettant x^2 en facteur dans le logarithme :
       $$\frac{f(x)}{x}=1+\frac{\ln(x^2-1)}{x}=1+\frac{2\ln x}{x}+\frac{\ln\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)}{x}.$$
       Ainsi par croissance comparée et par propriétés sur les sommes, composée et quotient de limites, on a $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$.
     - ⋆ Étude de $f(x)-x$:
       On a
       $$\forall x>1,\quad f(x)-x=\ln(x^2-1),$$
       et ainsi, on obtient que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x=+\infty$. Ainsi, la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une branche parabolique de direction asymptotique la droite d'équation $y=x$ au voisinage de $+\infty$.

- Étude en $-\infty$:
  On met en facteur le terme prépondérant x et on obtient que :
  $$\forall x < -1, \qquad f(x) = x\left(1 + \frac{\ln(x^2-1)}{x}\right) = x\left(1 + \frac{2\ln x}{x} + \frac{\ln\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)}{x}\right).$$
  Ainsi, par croissance comparé et par propriété sur les sommes, composée et quotient de limites, on obtient que
  $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$
  Recherche d'asymptote oblique au voisinage de $-\infty$:
  - ⋆ Étude de $\frac{f(x)}{x}$:
    Soit $x < -1$, on a,
    $$\frac{f(x)}{x} = 1 + \frac{2\ln x}{x} + \frac{\ln\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)}{x}.$$
    Ainsi par croissance comparée et par propriétés sur les sommes, composée et quotient de limites, on a $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$.
  - ⋆ Étude de $f(x) - x$:
    On a
    $$\forall x < -1, \quad f(x) - x = \ln(x^2-1),$$
    et ainsi, on obtient que : $\lim_{x\to-\infty} f(x) - x = +\infty$. Ainsi, la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une branche parabolique de direction asymptotique la droite d'équation $y = x$ au voisinage de $-\infty$.

IV Propriétés générales avec les limites

Correction 15. Raisonnons par l'absurde et supposons que f n'est pas constante égale à l : alors il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) \neq l$. On pose alors $x_n = x_0 + nT$. On a $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$, et $f(x_n) = f(x_0 + nT) = f(x_0)$ car f est T-périodique. Donc $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x_0) \neq l$. Ceci est impossible, car on sait que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$. Donc on a une contradiction, et on en deduit que f est constante égale à l.

Correction 16. Pour montrer qu'une fonction f n'admet pas de limite en $+\infty$ par exemple, il suffit de trouver deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tendent vers $+\infty$ telle que les suites $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(f(v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tendent vers deux limites différentes quand n tend vers l'infini.
On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2n\pi$ et $v_n = \pi + 2n\pi$. Ces deux suites tendent bien toutes les deux vers $+\infty$ quand n tend vers l'infini. De plus, on a $\cos(u_n) + \sin(u_n) = 1$ qui tend vers 1 en $+\infty$, et $\cos(v_n) + \sin(v_n) = -1$ qui tend vers -1 en $+\infty$. Ainsi, $\boxed{\text{la fonction n'a pas de limite en } +\infty}$. Le même raisonnement en faisant tendre n vers $-\infty$ permet de montrer que la fonction n'a pas de limite en $-\infty$ non plus.