TD 17 - Polynômes

I Opérations sur les polynômes

Exercice 1. On pose $P = X^2 + 3X$, $Q = X^2 + X + 1$, $S = X^2 - 1$.

1. Calculer P^2, $P - Q$ et $P^2 - Q^2$.
2. Calculer $P(X+1)$.
3. Calculer $S \circ f$ avec $f : t \mapsto \cos(t)$.

Exercice 2. Simplifier le polynôme $R = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k (1-X)^{3n-2k} X^k$.

II Degré et coefficients

Exercice 3. Dans les deux cas suivants, déterminer tous les polynômes P vérifiant les conditions indiquées

1. $\deg(P) = 3$ et $P(1) = 4,\ P(-1) = 0,\ P(-2) = -5,\ P(2) = 15$.
2. $\deg(P) \leq 2$ et $P^2 = X^4 + 2X^3 - 3X^2 - 4X + 4$.

Exercice 4. Déterminer le degré et le coefficient dominant des polynômes suivants où n désigne un entier strictement positif et P un polynôme de degré n et de coefficient dominant $a_n \neq 0$.

1. $(X^4 + 1)^3$
2. $(X+1)^n - (X-1)^n$
3. $P^2 - P + 1$
4. $Q = P(X+1) - P$

Exercice 5. Soient les polynômes $P = X^2 - X + 1$ et $Q = X^3 - X$. Pour tout entier $n \geq 1$, on définit par récurrence les polynômes P_n par

$$\begin{cases} P_1 = P \\ P_{n+1} = XP_n(Q) + 2QP_n. \end{cases}$$

1. Calculer P_2.
2. Calculer les degrés de P_2 et de P_3.
3. Déterminer pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ le degré de P_n.
4. Déterminer le coefficient dominant de P_n.

Exercice 6. On définit une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\begin{cases} P_0 = 1,\ P_1 = X \\ \forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+2} = XP_{n+1} + \left(1 - \dfrac{X^2}{4}\right) P_n. \end{cases}$

1. Calculer P_2 et P_3.
2. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est de degré inférieur ou égal à n.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note a_n le coefficient d'indice n de P_n.
   (a) Donner les valeurs de $a_0,\ a_1,\ a_2$ et a_3.
   (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+2} = a_{n+1} - \dfrac{a_n}{4}$.
   En déduire une expression de a_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$ puis le degré du polynôme P_n.

Exercice 7. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$.

1. Exprimer de deux façons différentes le coefficient de X^n dans le polynôme : $P = (1+X)^n(1+X)^n$.
2. En déduire l'expression de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

III Racines d'un polynôme

Exercice 8. Trouver toutes les racines de $P = X^4 - 5X^3 + 7X^2 - 5X + 6$ dans $\mathbb{C}$.

Exercice 9. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On considère les polynômes $A = (X+1)^n - (X-1)^n$ et $B = \left(\sum_{k=0}^{n} X^k\right)^2$.

1. Calculer le degré de ces deux polynômes.
2. Déterminer les racines de ces deux polynômes.

Exercice 10. Soit n un entier non nul. Montrer que a donné est racine du polynôme et déterminer l'ordre de multiplicité de cette racine

1. $a = 2$ et $P = X^5 - 5X^4 + 7X^3 - 2X^2 + 4X - 8$
2. $a = 1$ et $P = X^{2n} - nX^{n+1} + nX^{n-1} - 1$

Exercice 11. Déterminer le nombre a de manière à ce que le polynôme $P = X^5 - aX^2 - aX + 1$ ait -1 comme racine au moins double.

IV Factorisation dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$ et conséquences

Exercice 12. Montrer dans chacun des cas suivants que B divise A :

1. $A = X^9 - 1$ et $B = X^3 - 1$.
2. $A = 2X^4 - 3X^3 - X^2 - 15X + 6$ et $B = X^2 - 3X + 1$.
3. $A = X^3 - iX^2 - X + i + 5$ et $B = X - 1 + i$.

Exercice 13. À quelle condition sur $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ le polynôme $B = X^2 + X + 1$ divise-t-il le polynôme $A = X^4 + aX^2 + bX + c$?

Exercice 14. On considère le polynôme $P = X^5 + 3X^4 + 5X^3 + 5X^2 + 3X + 1$.

1. Trouver une racine évidente de P. Montrer que j est racine de P.
2. En déduire la factorisation de P dans $\mathbb{C}$ et dans $\mathbb{R}$.

Exercice 15. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$ lorsque cela a un sens les polynômes suivants :

1. $P = X^3 + 1$
2. $P = (X+i)^n - (X-i)^n$
3. $P = X^6 - 1$
4. $P = X^8 + X^4 + 1$
5. $P = X^4 - 2X^2 - 8$
6. $P = X^n - 1$
7. $P = X^4 + 4$
8. $P = X^5 + 32$
9. $P = (2X-1)^n - (-2X+3)^n$
10. $P = X^4 + 3X^3 - 14X^2 + 22X - 12$ sachant que $i + 1$ est racine dans $\mathbb{C}$

Exercice 16. Soient trois scalaires $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$ et le polynôme $P = X^3 + aX^2 + bX + c$.
On suppose que u, v, w sont les trois racines complexes de P. Montrer que

$$u + v + w = -a \qquad uv + vw + uw = b \qquad \text{et} \qquad uvw = -c.$$

Exercice 17. Polynômes de Tchebychev de deuxième espèce : on considère la suite de polynômes

$$\begin{cases} P_1 = 1,\ P_2 = 2X \\ \forall n \geq 1,\ P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n. \end{cases}$$

1. Calculer P_3 et P_4.
2. Soit $\theta \in]0, \pi[$ et $n \geq 1$.
   (a) Montrer que $\sin(n\theta) = P_n(\cos(\theta))\sin(\theta)$.
   (b) Déterminer les solutions de l'équation $\sin(nx) = 0$ sur $]0, \pi[$.
   (c) En déduire les racines de P_n sur $]-1, 1[$. Justifier que les $n - 1$ racines trouvées sont 2 à 2 distinctes.

3. Déterminer pour tout $n \geq 1$ le degré et le coefficient dominant de P_n.
4. (a) Pour tout $n \geq 1$, donner la décomposition du polynôme P_n dans $\mathbb{R}[X]$.

   (b) En déduire que pour tout $\theta \in]0, \pi[$,

$$\frac{\sin(n\theta)}{\sin(\theta)} = 2^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \left(\cos(\theta) - \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) \right).$$

5. Soit $n \geq 1$. Dériver deux fois par rapport à θ la relation obtenue au 2a et en déduire que

$$(1 - X^2)P_n'' - 3XP_n' + (n^2 - 1)P_n = 0.$$

Exercice 18. Soit $n \geq 2$, on pose $P = (X+1)^n - 1$.

1. Déterminer toutes les racines de P dans $\mathbb{C}$ et en déduire la factorisation de P dans $\mathbb{C}[X]$.
2. On note Q le polynôme de $\mathbb{C}[X]$ tel que : $P = XQ$. À l'aide des racines de Q, déterminer la valeur de :

$$A = \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$

V Résolutions d'équations avec des polynômes

Exercice 19. Expression de sommes.

1. Trouver un polynôme P de degré 4 tel que : $P - P(X+1) = X^3$.
   En déduire la valeur de : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer qu'il existe un polynôme P de degré 4 tel que : $P(X+1) - P = X(X-1)(X-2)$
   En déduire pour tout $n \geq 1$ une expression simple de $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k-1)(k-2)$.

Exercice 20. Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose

$$\varphi(P) = (3X+1)P - X(X-1)P'.$$

1. Vérifier que φ définit bien une application de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$.
2. (a) Pour quelles valeurs de n a-t-on $\varphi(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_n[X]$?

   (b) Pour ces valeurs de n, déterminer les polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ tels que $\varphi(P) = 0$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}[X]$ l'équation $\varphi(P) = X^2$.

Exercice 21. On cherche ici à déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(X^2) = (X^2+1)P$.

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant $P(X^2) = (X^2+1)P$. Quel est son degré ?
2. Déterminer P à l'aide d'une identification des coefficients.
3. Retrouver l'expression de P en déterminant ses racines.

Exercice 22.

1. Déterminer tous les polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ tels que : $P = XP'$.
2. Déterminer tous les polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ tels que : $(2X^2 - 3)P'' - 6P = 0$.
3. Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que : $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n) = 0$.
4. Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que : $P(X+1) = -P$.