Correction TD 17 - Polynômes

I Opérations sur les polynômes

Correction 1.

1. Les calculs donnent $P^2 = X^4 + 6X^3 + 9X^2$, $P - Q = 2X - 1$, $P^2 - Q^2 = 4X^3 + 6X^2 - 2X - 1$.
2. On obtient $P(X+1) = X^2 + 5X + 4$.
3. $S \circ f : t \mapsto -\sin^2(t)$.

Correction 2. On cherche à faire apparaître la formule du binôme de Newton. On a :

$$R = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k (1-X)^{3n-2k} X^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (3X)^k [(1-X)^3]^{n-k} (1-X)^k$$

car $[(1-X)^3]^{n-k}(1-X)^k = (1-X)^{3n-3k}(1-X)^k = (1-X)^{3n-2k}$. On obtient alors :

$$R = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} [3X(1-X)]^k [(1-X)^3]^{n-k}$$

et sous cette forme on reconnaît la formule du binôme de Newton. Ainsi on obtient : $R = \big(3X(1-X) + (1-X)^3\big)^n$, soit : $\boxed{R = (1-X)^n (X^2+X+1)^n}$.

II Degré et coefficients

Correction 3.

1. On sait donc que P est de degré 3 et que -1 est racine de P. Ainsi P est de la forme $P = (X+1)(aX^2+bX+c)$. Puis on utilise le fait que : $P(1) = 4$, $P(-2) = -5$ et $P(2) = 15$. Ces trois conditions permettent d'obtenir le système suivant : $\begin{cases} a+b+c &= 2 \\ 4a-2b+c &= 5 \\ 4a+2b+c &= 5 \end{cases}$. La résolution donne : $a = 1$, $b = 0$ et $c = 1$. On a donc ainsi entierement déterminé P : $\boxed{P = (X+1)(X^2+1)}$.
2. Comme $\deg P \leq 2$, on cherche P sous la forme : $P = aX^2 + bX + c$. Les calculs donnent : $P^2 = a^2X^4 + 2abX^3 + (b^2+2ac)X^2 + 2bcX + c^2$. Puis par unicité des coefficients d'un polynôme, on doit résoudre le système suivant : $\begin{cases} a^2 &= 1 \\ ab &= 1 \\ b^2+2ac &= -3 \\ bc &= -2 \\ c^2 &= 4 \end{cases}$. Comme $a^2 = 1$, on a : $a = -1$ ou $a = 1$. De même comme $c^2 = 4$, on a : $c = -2$ ou $c = 2$. Étudions les 4 possibilités que l'on a :
   - si $a = 1$ et $c = 2$: comme $ab = 1$, on a : $b = 1$. Mais comme $bc = -2$, $b = -1$: impossible.
   - si $a = -1$ et $c = -2$: comme $ab = 1$, on a : $b = -1$. Mais comme $bc = -2$, $b = 1$: impossible.

- si $a=1$ et $c=-2$: comme $ab=1$, on a : $b=1$ et ainsi $bc=-2$. Et on a aussi alors $b^2+2ac=-3$.
- si $a=-1$ et $c=2$: $b=-1$ vérifie bien $ab=1$, $bc=-2$ et $b^2+2ac=-3$.

Ainsi il y a deux solutions qui sont : $\boxed{P=-X^2-X+2 \text{ et } P=X^2+X-2}$.

Correction 4.

1. On a : $(X^4+1)^3=P(Q)$ avec $P=X^3$ et $Q=X^4+1$. Ainsi par propriété sur le degré d'une composée de polynômes, on obtient que $\deg(X^4+1)^3=12$. De plus, en développant avec le binôme de Newton, on obtient que le coefficient dominant est 1.
2. On pose $P=(X+1)^n-(X-1)^n=Q-R$. Par propriété sur le degré d'une somme de polynômes de même degré, on sait que $\deg P\leq \deg Q$, à savoir : $\deg P\leq n$. Pour connaître exactement son degré, il faut regarder les termes de plus haut degré dans Q et R et regarder s'ils s'annulent. Par le binôme de Newton, on sait que : $Q=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}X^k$ et $R=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}X^k$. On commence par regarder les termes en X^n et on obtient : $P=\binom{n}{n}X^n-\binom{n}{n}(-1)^0X^n+T$ avec $T\in\mathbb{R}_{n-1}[X]$. Ainsi les termes devant X^n s'annulent et donc $\deg P\leq n-1$. On regarde donc maintenant les termes devant X^{n-1} et on obtient $P=\binom{n}{n-1}X^{n-1}-\binom{n}{n-1}(-1)^1X^{n-1}+T=2nX^{n-1}+T$ avec $T\in\mathbb{R}_{n-2}[X]$. Comme $2n\neq 0$, on vient de démontrer que $\boxed{\deg P=n-1 \text{ et son coefficient dominant est } 2n}$.
3. Par propriété sur le degré d'une composée, on sait que $\deg P^2=2n$ et par propriété sur le degré d'une somme, on a : $\deg(P+1)\leq n$. Comme $2n\neq n$ car $n\in\mathbb{N}^\star$, par propriété sur le degré d'une somme de polynômes de degré différents, on obtient que : $\boxed{\deg(P^2+P+1)=2n}$. Et si a_n est le coefficient dominant de P, alors $\boxed{a_n^2 \text{ est le coefficient dominant de } P^2+P+1}$ car a_n^2 est le coefficient dominant de P^2.
4. Par propriété sur le degré d'une composée de polynômes, on sait que $\deg P(X+1)=\deg P$. Puis par propriété sur le degré d'une somme de polynômes de même degré, on obtient que : $\deg Q\leq\deg P$. Étudions les termes en X^n pour savoir s'ils s'annulent ou pas. On a : $P=a_nX^n+T$ avec $T\in\mathbb{R}_{n-1}[X]$. Ainsi, on obtient que : $Q=a_n(X+1)^n+T(X+1)-a_nX^n-T=a_nX^n-a_nX^n+R$ avec $R\in\mathbb{R}_{n-1}[X]$ en utilisant le binôme de Newton afin de développer le terme en $(X+1)^n$. Ainsi, on obtient que $Q=R$ et ainsi $\deg Q\leq n-1$. Il faut donc alors regarder les termes en X^{n-1}. Toujours en utilisant le binôme de Newton et le fait que $P=a_nX^n+a_{n-1}X^{n-1}+T$ avec $T\in\mathbb{R}_{n-2}[X]$, on obtient que : $Q=a_n(X+1)^n+a_{n-1}(X+1)^{n-1}+T(X+1)-a_nX^n-a_{n-1}X^{n-1}-T=a_n\binom{n}{n-1}X^{n-1}+a_{n-1}X^{n-1}+T(X+1)-a_{n-1}X^{n-1}-T=na_nX^{n-1}+R$ avec $R\in\mathbb{R}_{n-2}[X]$. Comme $a_n\neq 0$ et $n\in\mathbb{N}^\star$, on a que : $\boxed{na_n\neq 0 \text{ et ainsi } \deg Q=n-1 \text{ de coefficient dominant } na_n}$.

Correction 5.

1. Les calculs donnent : $P_2=XP(Q)+2Q\times P=X^7-5X^4+3X^3+3X^2-X$.
2. On a donc $\deg P_2=7$ et en utilisant les propriétés sur le degré d'un produit et d'une composée de polynômes, on obtient : $\deg P_3=22$.
3.
   - Comme on n'arrive pas à conjecturer directement l'expression du degré de P_n, on va obtenir une relation de récurrence en utilisant la relation de récurrence qui définit la suite des polynômes. On note $d_n=\deg P_n$. On sait que : $P_{n+1}=XP_n(Q)+2QP_n$. Par propriété sur le degré d'un produit de polynômes, on sait que : $\deg QP_n=3+d_n$. De même, par propriété sur le degré d'une composée et d'un produit de polynômes, on obtient que : $\deg XP_n(Q)=3d_n+1$. Comme $3d_n+1>3+d_n$ dès que $d_n>1$ ce qui est toujours le cas (car les degrés sont de plus en plus grands et le degré de P_1 est 2), on a par propriété sur le degré d'une somme de polynômes dont les degrés sont différents : $\deg P_{n+1}=3d_n+1$, à savoir : $d_{n+1}=3d_n+1$.
   - On reconnaît donc une suite arithmético-géométrique de premier terme $d_1=2$ et dont la relation de récurrence est : $d_{n+1}=3d_n+1$. Les calculs donnent que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $\boxed{d_n=7\times 3^{n-1}-\frac{1}{2}}$.

4. Les calculs faits pour P_2 et P_3 permettent de conjecturer que le coefficient dominant est 1. On le montre par récurrence en utilisant la relation de récurrence qui définit la suite des polynômes. A faire.

Correction 6.

1. On obtient $P_2 = \dfrac{3}{4}X^2 + 1$ et $P_3 = \dfrac{1}{2}X^3 + 2X$.
2. Montrons par recurrence double la propriété $H_n : \deg(P_n) \leq n$.
   - Initialisation : On a $\deg(P_0) = 0 \leq 0$ et et $\deg(P_1) = 1 \leq 1$, donc H_0 et H_1 sont vraies.
   - Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé, on suppose H_n et H_{n+1} vraies, montrons que H_{n+2} est vraie.
   D'après H_n et H_{n+1}, et peut écrire $P_n = a_nX^n + R$ et $P_{n+1} = a_{n+1}X^{n+1} + S$ avec $R \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $S \in \mathbb{R}_n[X]$. Donc on obtient, par définition de la suite :
   $$\begin{aligned} P_{n+2} &= X(a_{n+1}X^{n+1} + S) + \left(1 - \frac{X^2}{4}(a_nX^n + R\right) \\ &= \left(a_{n+1} - \frac{a_n}{4}\right) X^{n+2} + XS + a_nX^n - \frac{X^2R}{2}. \end{aligned}$$
   Or par somme et produit de polynômes, on a $\deg(XS) \leq 1+n = n+1$, $\deg(a_nX^n) = n$ et $\deg(X^2R) \leq 2+n-1 = n+1$. Donc finalement le degré de P_{n+2} est inférieur ou égal à $n+2$, et le coefficient de X^{n+2} vaut $a_{n+2} = a_{n+1} - \dfrac{a_n}{4}$ (ce coefficient pourrait s'annuler).

   Par principe de récurrence, on a donc $\boxed{\deg(P_n) \leq n}$.
3. (a) D'après les calculs précédents, on a $\boxed{a_0 = 1, a_1 = 1, a_2 = \dfrac{3}{4}, a_3 = \dfrac{1}{2}}$.

   (b) D'après la question 2), on a bien $a_{n+2} = a_{n+1} - \dfrac{a_n}{4}$.
   On en déduit que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire double. On calcule alors son terme général grâce à la méthode vue en cours, et on obtient $\boxed{a_n = (1+n)\dfrac{1}{2^n}}$. On en déduit que le coefficient d'indice n est non nul, donc $\boxed{P_n \text{ est bien de degré } n}$.

Correction 7.

1. - On peut par exemple remarquer que $P = (X+1)^{2n}$ et on peut alors utiliser le binôme de Newton qui nous donne : $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} X^k$. Ainsi le coefficient devant X^n vaut $\binom{2n}{n}$.
   - Mais on peut aussi voir P comme le produit $(X+1)^n \times (X+1)^n$ et en utilisant encore le binôme de Newton, on obtient :
   $$\begin{aligned} P &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k \times \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} X^j \\ &= \left(\binom{n}{0}X^0 + \binom{n}{1}X^1 + \ldots + \binom{n}{n}X^n\right) \times \left(\binom{n}{0}X^0 + \binom{n}{1}X^1 + \ldots + \binom{n}{n}X^n\right). \end{aligned}$$
   On cherche alors à développer ces deux sommes et à regarder quels sont les termes qui vont faire apparaître du X^n : le X^0 de la première somme doit être multiplié avec du X^n de la deuxième somme, le X de la première somme avec du X^{n-1} de la deuxième somme, ..., le X^{n-1} de la première somme avec le X de la deuxième somme et enfin le X^n de la première somme avec le X^0 de la deuxième somme. Donc pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, le X^k de la première somme doit être multiplié avec le X^{n-k} de la de la deuxième somme. Ainsi, cela nous donne : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$ qui est le terme qui apparaît devant X^n.

   Par unicité des coefficients d'un polynôme, on obtient que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \binom{2n}{n}$.

2. Comme, par symétrie des coefficients binomiaux, on sait que $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, la formule précédente devient : $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

III Racines d'un polynôme

Correction 8. On peut remarquer que i est racine de P et comme $P \in \mathbb{R}$, on sait donc que $-i$ aussi est racine de P. On peut tout de suite remarquer que i n'est pas racine de P' et donc i et $-i$ sont racines simples de P. On peut aussi remarquer que 2 est racine de P et que $P'(2) \neq 0$. Ainsi 2 est aussi racine simple de P. Ainsi on peut factoriser P par $(X+i)(X-i)(X-2) = (X^2+1)(X-2)$. L'identification des polynômes donne que 3 est racine de P et que P se factorise dans $\mathbb{C}$ sous la forme : $\boxed{P = (X-i)(X+i)(X-2)(X-3)}$. On est sûr d'avoir bien trouvé toutes les racines car on a 4 racines et P est un polynôme de degré 4.

Remarque : on peut également trouver la dernière racine en utilisant : $i \times (-i) \times 2 \times x_4 = (-1)^4 \frac{6}{1}$, donc $x_4 = 3$.

Correction 9.

1. (a) Dans l'exercice 4.2, on a déjà montré que : $\deg A = n-1$.
   (b) On a : $B = P^2$ avec $P = \sum_{k=0}^{n} X^k$. On a donc : $\deg B = 2 \deg P$. De plus, $\deg P = n$ donc $\deg B = 2n$.
2. (a) L'idée ici est de se ramener à la résolution d'une équation type racine n-ième de l'unité. On a déjà par définition d'une racine d'un polynôme que : z est racine de A si et seulement si $A(z) = 0$ si et seulement si $(z+1)^n = (z-1)^n$.
   - Comme 1 n'est pas solution de l'équation, on peut supposer que $z \neq 1$. Ainsi, on peut bien diviser par $(z-1)^n$ qui est bien non nul. Ainsi, on a
   $$(z+1)^n = (z-1)^n \Leftrightarrow \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n = 1 \Leftrightarrow Z^n = 1$$
   en posant $Z = \frac{z+1}{z-1}$.
   - Résolution des racines n-ièmes de l'unité (à savoir faire, cours) : on obtient après calculs que les solutions sont les Z de la forme $Z_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}, \quad k \in [\![0, n-1]\!]$.
   - On repasse alors à z et on cherche donc les z tels que : $\frac{z+1}{z-1} = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ avec $k \in [\![0, n-1]\!]$ fixé. On obtient alors
   $$\frac{z+1}{z-1} = e^{\frac{2ik\pi}{n}} \Leftrightarrow z+1 = e^{\frac{2ik\pi}{n}}(z-1) \Leftrightarrow z\left(1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right) = -e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1 \Leftrightarrow z\left(e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1\right) = \left(e^{\frac{2ik\pi}{n}} + 1\right).$$
   Ici, il faut faire attention car on ne peut JAMAIS diviser par un nombre sans vérifier qu'il est bien NON nul. Or on a :
   $$e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{\frac{2ik\pi}{n}} = 1 \Leftrightarrow \frac{2k\pi}{n} = 2k'\pi \Leftrightarrow k = nk'$$
   avec $k' \in \mathbb{Z}$. Or $k \in [\![0, n-1]\!]$ donc le seul k qui vérifie cela est $k = 0$.
     - ⋆ Pour $k = 0$, on obtient : $0 = 2$ donc il n'y a pas de solution pour $k = 0$.
     - ⋆ Pour $k \neq 0$, à savoir pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, on sait que $1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}} \neq 0$ et on peut donc bien diviser. On obtient
     $$z = \frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}} + 1}{e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1} = -icot\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$
     en utilisant la méthode de l'angle moitié.

- Les racines de A sont donc $z = -i \cot\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ avec $k \in [\![1, n-1]\!]$. On les bien toutes trouvées puisque l'on en a $n-1$ et que le polynôme est de degré $n-1$.

(b) On a : z est racine de B si et seulement si $B(z) = 0$ si et seulement si $\sum_{k=0}^{n} z^k = 0$. Or on reconnaît une somme géométrique et ainsi, on a si $z \neq 1$: $\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$. On remarque aussi que 1 n'est pas racine car $\sum_{k=0}^{n} 1^k = n + 1 \neq 0$. Donc on peut bien supposer $z \neq 1$. Ainsi, on a : z est racine de B si et seulement si : $\frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} = 0 \Leftrightarrow z^{n+1} = 1$. On reconnaît la résolution des racines $n+1$-ième de l'unité. Les calculs donnent : $z_k = e^{\frac{2ik\pi}{n+1}}$ avec $k \in [\![0, n]\!]$. Mais comme $z \neq 1$, on doit enlever le cas $k = 0$ qui donne 1. Ainsi les racines de B sont les complexes de la forme : $z_k = e^{\frac{2ik\pi}{n+1}}$ avec $k \in [\![1, n]\!]$. Et on a bien trouvé toutes les racines puisque l'on en a n et que le degré de P est n.

Correction 10. On regarde si a est racine de P et ainsi a est au moins racine simple. Puis on regarde jusqu'à quelle dérivée de P, a est-elle encore racine, ce qui donne l'ordre de multiplicité de la racine a.

1. Les calculs donnent que : $P(2) = 0 = P'(2) = P^{(2)}(2)$ et $P^{(3)}(2) \neq 0$. Ainsi 2 est racine triple de P.
2. Les calculs donnent que : $P(1) = 0 = P'(1) = P^{(2)}(1)$ et $P^{(3)}(1) \neq 0$. Ainsi 1 est racine triple de P.

Correction 11. Pour que -1 soit racine au moins double de P, on doit avoir : $P(-1) = 0 = P'(-1)$. Les calculs donnent que : $P(-1) = -1 - a + a + 1 = 0$ donc -1 est racine au moins simple de P sans condition sur a. On a de plus : $P' = 5X^4 - 2aX - a$. Ainsi, on obtient : $P'(-1) = 0 \Leftrightarrow a = -5$.
Donc $\boxed{-1 \text{ racine au moins double de } P \text{ si et seulement si } a = -5}$.

IV Factorisation dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Correction 12. Il y a trois méthodes principales : montrer qu'il existe un polynôme P tel que $A = P \times B$ en factorisant, utiliser les identités remarquables, ou montrer que les racines de B sont bien racines de A.

1. On utilise l'identité remarquable : $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ en prenant $a = X^3$ et $b = 1$. On obtient donc $A = X^9 - 1 = (X^3 - 1)(X^6 + X^3 + 1)$, donc B divise A.
   Autre méthode : les racines de B sont $1, j$ et j^2. Or on a $1^9 - 1 = 0$, $j^9 - 1 = (j^3)^3 - 1 = 1^3 - 1 = 0$ et enfin $(j^2)^9 - 1 = (j^3)^6 - 1 = 1^6 - 1 = 0$, donc $1, j$ et j^2 sont bien des racines de A. Donc B divise A.
2. Montrons qu'il existe un polynôme P de degré 2 tel que $A = P \times B$. On cherche P sous la forme $P = aX^2 + bX + c$. On a alors $A = P \times B \Leftrightarrow 2X^4 - 3X^3 - X^2 - 15X + 6 = (aX^2 + bX + c)(X^2 - 3X + 1)$. Par identification des coefficients, on obtient alors $a = 2, b = 3$ et $c = 6$. Donc B divise bien A.
3. Il suffit de montrer que la seule racine de B, qui est $1 - i$, est aussi racine de A.

Correction 13. Les racines de B sont j et j^2. Pour que B divise A, il suffit donc que j et j^2 soient racines de A, c'est-à-dire que l'on ait

$$\begin{cases} j^4 + aj^2 + bj + c &= 0 \\ j^8 + aj^4 + bj^2 + c &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} aj^2 + (b+1)j + c &= 0 \\ aj + (b+1)j^2 + c &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} aj^2 + (b+1)j + c &= 0 \\ a(j - j^2) + (b+1)(j^2 - j) &= 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c &= -a(j^2 + j) = -a \\ b &= a - 1 \end{cases}$$

On en déduit que les polynômes A doivent être de la forme $A = X^4 + aX^2 + (a-1)X - a$, avec $a \in \mathbb{R}$. **Correction**

14.

1.
   - Rappels des propriétés de j à connaître : $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$, $j^3 = 1$, $1 + j + j^2 = 0$ et $j^2 = e^{\frac{4i\pi}{3}} = \overline{j}$.
   - On a : $P(j) = j^5 + 3j^4 + 5j^3 + 5j^2 + 3j + 1 = j^2 + 3j + 5 + 5j^2 + 3j + 1 = 6(j^2 + j + 1) = 0$. Ainsi j est bien racine de P.
2.
   - Comme $P \in \mathbb{R}$, on sait aussi que $\overline{j} = j^2$ est racine de P. Regardons la multiplicité de j et j^2. Ce sont déjà des racines au moins simples. De plus, on a : $P' = 5X^4 + 12X^3 + 15X^2 + 10X + 3$. On a alors : $P'(j) = 5j + 12 + 15j^2 + 10j + 3 = 15(1 + j + j^2) = 0$. Donc j est au moins racine double de P et donc j^2 aussi. On remarque de plus que -1 est aussi racine évidente de P. Comme $\deg P = 5$ et que l'on a trouvé 5 racines comptées avec leur multiplicité, on sait qu'on les a toutes trouvées.
   - Factorisation dans $\mathbb{C}$: $P = (X - j)^2(X - j^2)^2(X + 1)$.
   - Factorisation dans $\mathbb{R}$: $P = (X + 1)(X^2 + X + 1)^2$ car $(X - j)(X - j^2) = (X^2 + X + 1)$.

Correction 15. On ne donne ici que des indications sur la méthode et le résultat final. On peut remarquer que pour passer de la factorisation dans $\mathbb{C}$ à la factorisation dans $\mathbb{R}$, on a toujours :

$$(X - z)(X - \overline{z}) = X^2 - (z + \overline{z})X + z\overline{z} = X^2 - 2\mathfrak{Re}(z)X + |z|^2.$$

1.
   - Racines complexes de P : on calcule avec la méthode habituelle les racines troisièmes de $-1 = e^{i\pi}$. On obtient -1, $e^{i\frac{\pi}{3}}$, $e^{-i\frac{\pi}{3}}$, 3 racines simples.
   - Factorisation dans $\mathbb{C}$: $\boxed{P = (X + 1)(X - e^{i\frac{\pi}{3}})(X - e^{-i\frac{\pi}{3}})}$.
   - Factorisation dans $\mathbb{R}$: $\boxed{P = (X + 1)(X^2 - X + 1)}$.
2.
   - Racines complexes de P. On résout l'équation $P(z) = 0$:
     - ⋆ Comme i n'est pas solution de l'équation, on peut supposer que $z \neq i$. Ainsi, on peut diviser par $(z - i)^n$ qui est bien non nul. Ainsi, on a
     $$(z + i)^n = (z - i)^n \Leftrightarrow \left(\frac{z + i}{z - i}\right)^n = 1 \Leftrightarrow Z^n = 1$$
     en posant $Z = \dfrac{z + i}{z - i}$.
     - ⋆ Résolution des racines n-ièmes de l'unité : on obtient (à détailler, voir cours) que les solutions sont les Z de la forme
     $$Z_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}, \quad k \in [\![0, n - 1]\!].$$
     - ⋆ On repasse alors à z et on cherche donc les z tels que : $\dfrac{z + i}{z - i} = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ avec $k \in [\![0, n - 1]\!]$ fixé. On obtient alors
     $$\frac{z + i}{z - i} = e^{\frac{2ik\pi}{n}} \Leftrightarrow z + i = e^{\frac{2ik\pi}{n}}(z - i) \Leftrightarrow z\left(1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right) = -ie^{\frac{2ik\pi}{n}} - i \Leftrightarrow z\left(e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1\right) = i\left(e^{\frac{2ik\pi}{n}} + 1\right).$$
     Ici, il faut faire attention car on ne peut JAMAIS diviser par un nombre sans vérifier qu'il est bien NON nul. Or on a :
     $$e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{\frac{2ik\pi}{n}} = 1 \Leftrightarrow \frac{2k\pi}{n} = 2k'\pi \Leftrightarrow k = nk'$$
     avec $k' \in \mathbb{Z}$. Or $k \in [\![0, n - 1]\!]$ donc le seul k qui vérifie cela est $k = 0$.
       - ⋆ Pour $k = 0$, on obtient : $0 = 2i$ donc il n'y a pas de solution pour $k = 0$.
       - ⋆ Pour $k \neq 0$, à savoir pour $k \in [\![1, n - 1]\!]$, on sait que $1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}} \neq 0$ et on peut donc bien diviser. On obtient, en utilisant la méthode de l'angle moitié :
       $$z = \frac{i\left(e^{\frac{2ik\pi}{n}} + 1\right)}{e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1} = \frac{2i\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)}{2i\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)} = \cot\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$

⋆ Les racines de A sont donc $z = \cot\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ avec $k \in [\![1, n-1]\!]$.

- Factorisation dans $\mathbb{C}$: avant de factoriser, on doit trouver le coefficient dominant du polynôme. Pour cela, on utilise la formule du binôme de Newton, et on sort les termes en X^n (qui se simplifient) et en X^{n-1} :

$$\begin{aligned} P = (X+i)^n - (X-i)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k i^{n-k} - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k (-i)^{n-k} \\ &= X^n + niX^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k} X^k i^{n-k} - \left(X^n - niX^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k} X^k (-i)^{n-k}\right) \\ &= 2niX^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k} X^k (i^{n-k} - (-i)^{n-k}) \end{aligned}$$

Ainsi, le polynôme est de degré $n-1$ (ce qui est cohérent puisqu'on a trouvé $n-1$ racines complexes), et son coefficient dominant est $2ni$. On peut donc factoriser : $\boxed{P = 2ni \prod_{k=1}^{n-1} \left(X - \cot\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)}$.

3. - Racines complexes de P : Racines 6-ièmes de l'unité : -1, 1, $e^{i\frac{\pi}{3}}$, $e^{i\frac{2\pi}{3}}$, $e^{i\frac{4\pi}{3}}$, $e^{i\frac{5\pi}{3}}$: 6 racines simples pour un polynôme de degré 6.
   - Factorisation dans $\mathbb{C}$: $\boxed{P = (X-1)(X+1)(X-e^{i\frac{\pi}{3}})(X-e^{i\frac{2\pi}{3}})(X-e^{i\frac{4\pi}{3}})(X-e^{i\frac{5\pi}{3}})}$.
   - Factorisation dans $\mathbb{R}$: $\boxed{P = (X+1)(X-1)(X^2-X+1)(X^2+X+1)}$ car $(X-e^{i\frac{\pi}{3}})(X-e^{i\frac{5\pi}{3}}) = X^2 - X + 1$ et $(X-e^{i\frac{2\pi}{3}})(X-e^{i\frac{4\pi}{3}}) = X^2+X+1$.
4. - Racines complexes de P : il faut remarquer que : $P = Q(X^4)$ avec $Q = Y^2+Y+1$. Les racines de Q sont $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $j^2 = e^{i\frac{4\pi}{3}}$. Ainsi, z est racine de P si seulement si $Q(z^4) = 0 \Leftrightarrow z^4 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ ou $z^4 = e^{i\frac{4\pi}{3}}$. Il faut donc calculer les racines quatrièmes des nombres complexes $e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $e^{i\frac{4\pi}{3}}$. On obtient : $e^{i\frac{\pi}{6}}$, $e^{i\frac{8\pi}{12}}$, $e^{i\frac{14\pi}{12}}$ et $e^{i\frac{20\pi}{12}}$ pour les racines quatrièmes du nombre complexe $e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $e^{i\frac{2\pi}{6}}$, $e^{i\frac{5\pi}{6}}$, $e^{i\frac{8\pi}{6}}$ et $e^{i\frac{11\pi}{6}}$ pour les racines quatrièmes du nombre complexe $e^{i\frac{4\pi}{3}}$. On a ainsi bien obtenu 8 racines simples distinctes.
   - Factorisation dans $\mathbb{C}$:

   $$\boxed{P = (X-e^{i\frac{\pi}{6}})(X-e^{i\frac{2\pi}{3}})(X-e^{i\frac{7\pi}{6}})(X-e^{i\frac{5\pi}{3}})(X-e^{i\frac{\pi}{3}})(X-e^{i\frac{5\pi}{6}})(X-e^{i\frac{4\pi}{3}})(X-e^{i\frac{11\pi}{6}})}.$$

   - Factorisation dans $\mathbb{R}$: on regroupe ensemble les racines conjuguées et on obtient :

   $$\boxed{P = (X^2-X+1)(X^2+\sqrt{3}X+1)(X^2-\sqrt{3}X+1)\left(X^2+X+1\right)}.$$

5. - Racines complexes de P : il faut remarquer que : $P = Q(X^2)$ avec $Q = Y^2 - 2Y - 8$. Les racines de Q sont -2 et 4. Ainsi, z est racine de P si seulement si $Q(z^2) = 0 \Leftrightarrow z^2 = -2$ ou $z^2 = 4$. Il faut donc calculer les racines seconde des nombres $-2 = 2e^{i\pi}$ et 4. On obtient : -2, 2, $-\sqrt{2}i$ et $\sqrt{2}i$.
   - Factorisation dans $\mathbb{C}$: $\boxed{P = (X-2)(X+2)(X-\sqrt{2}i)(X+\sqrt{2}i)}$.
   - Factorisation dans $\mathbb{R}$: $\boxed{P = (X-2)(X+2)(X^2+2)}$.
6. - Racines complexes de P : Racines n-ièmes de l'unité. On obtient $z = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ avec $k \in [\![0, n-1]\!]$.
   - Factorisation dans $\mathbb{C}$: $\boxed{P = \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)}$.
   - Factorisation dans $\mathbb{R}$: A ne pas faire.
7. - Racines complexes de P : Racines quatrièmes de -4 : $\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}$, $\sqrt{2}e^{\frac{3i\pi}{4}}$, $\sqrt{2}e^{\frac{5i\pi}{4}}$ et $\sqrt{2}e^{\frac{7i\pi}{4}}$: 4 racines simples pour un polynôme de degré 4.
   - Factorisation dans $\mathbb{C}$: $\boxed{P = (X-\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}})(X-\sqrt{2}e^{\frac{3i\pi}{4}})(X-\sqrt{2}e^{\frac{5i\pi}{4}})(X-\sqrt{2}e^{\frac{7i\pi}{4}})}$.
   - Factorisation dans $\mathbb{R}$: $\boxed{P = (X^2-2X+2)(X^2+2X+2)}$.

8. • Racines complexes de P : Racines cinquièmes du nombre $-32 = 32e^{i\pi}$. Les racines sont : -2, $2e^{i\frac{\pi}{5}}$, $2e^{i\frac{3\pi}{5}}$, $2e^{i\frac{7\pi}{5}}$, $2e^{i\frac{9\pi}{5}}$: 5 racines simples pour un polynôme de degré 5.

• Factorisation dans $\mathbb{C}$: $\boxed{P = (X+2)(X-2e^{i\frac{\pi}{5}})(X-2e^{i\frac{3\pi}{5}})(X-2e^{i\frac{7\pi}{5}})(X-2e^{i\frac{9\pi}{5}})}$.

• Factorisation dans $\mathbb{R}$: $\boxed{P = (X+2)\left(X^2 - 4\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)X + 4\right)\left(X^2 - 4\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)X + 4\right)}$.

9. • Racines complexes de P : z est racine de P si et seulement si $(2z-1)^n = (-2z+3)^n$. Le but est alors de se ramener à la résolution des racines n-ième de l'unité.

⋆ Comme $\frac{3}{2}$ n'est pas solution de l'équation, on peut supposer que $z \neq \frac{3}{2}$. Ainsi, on peut bien diviser par $(-2z+3)^n$ qui est bien non nul. Ainsi, on a

$$(2z-1)^n = (-2z+3)^n \Leftrightarrow \left(\frac{2z-1}{-2z+3}\right)^n = 1 \Leftrightarrow Z^n = 1$$

en posant $Z = \frac{2z-1}{-2z+3}$.

⋆ Résolution des racines n-ièmes de l'unité : on obtient que les solutions sont les Z de la forme

$$Z_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}, \quad k \in [\![0, n-1]\!].$$

⋆ On repasse alors à z et on cherche donc les z tels que : $\frac{2z-1}{-2z+3} = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ avec $k \in [\![0, n-1]\!]$ fixé. On obtient alors

$$\frac{2z-1}{-2z+3} = e^{\frac{2ik\pi}{n}} \Leftrightarrow 2z-1 = e^{\frac{2ik\pi}{n}}(-2z+3) \Leftrightarrow 2z\left(1+e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right) = 3e^{\frac{2ik\pi}{n}} + 1.$$

Ici, il faut faire attention car on ne peut JAMAIS diviser par un nombre sans vérifier qu'il est bien NON nul. Or on a :

$$e^{\frac{2ik\pi}{n}} + 1 = 0 \Leftrightarrow e^{\frac{2ik\pi}{n}} = -1 \Leftrightarrow \frac{2k\pi}{n} = \pi + 2k'\pi \Leftrightarrow k = \frac{n}{2} + nk'$$

avec $k' \in \mathbb{Z}$. Or $k \in [\![0, n-1]\!]$ donc le seul k qui pourrait vérifier cela est $k = \frac{n}{2}$. Ainsi on doit distinguer deux cas selon que n est pair ou impair :

∘ Si n est pair alors $\frac{n}{2}$ est bien un nombre entier et on doit donc prendre $k \neq \frac{n}{2}$ si on veut diviser.

∘ Si n est impair alors $\frac{n}{2}$ n'est pas un nombre entier et pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on a bien $e^{\frac{2ik\pi}{n}} + 1 \neq 0$.

On peut alors finir la résolution :

∘ Pour n pair, on obtient : z racine de P si et seulement si : $z = \frac{3e^{\frac{2ik\pi}{n}} + 1}{2(e^{\frac{2ik\pi}{n}} + 1)} = \frac{\left(3e^{\frac{2ik\pi}{n}} + 1\right)e^{\frac{-ik\pi}{n}}}{4\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}$ avec $k \in [\![0, n-1]\!]$ et $k \neq \frac{n}{2}$. On obtient ainsi $n-1$ racines complexes distinctes et P est bien un polynôme de degré $n-1$ quand n est pair car le terme en X^n s'annule.

∘ Pour n impair, on obtient : z racine de P si et seulement si : $z = \frac{3e^{\frac{2ik\pi}{n}} + 1}{2(e^{\frac{2ik\pi}{n}} + 1)} = \frac{\left(3e^{\frac{2ik\pi}{n}} + 1\right)e^{\frac{-ik\pi}{n}}}{4\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}$ avec $k \in [\![0, n-1]\!]$. On obtient ainsi n racines complexes distinctes et P est bien un polynôme de degré n quand n est impair car le terme en X^n ne s'annule pas.

• Factorisation dans $\mathbb{C}$: Il faut connaître le coefficient dominant. On utilise pour cela le binôme de Newton et on regarde le terme en X^n pour n impair et le terme en X^{n-1} pour n pair. On a : $P = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^{n-k}2^k X^k - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}3^{n-k}(-2)^k X^k$. Ainsi le terme en X^n est $2^n - (-2)^n$ qui s'annule bien quand n est pair et qui vaut 2^{n+1} si n est impair. Et le terme en X^{n-1} vaut lorsque n est pair à savoir $n-1$ impair : $-n2^{n-1} - 3n(-2)^{n-1} = n2^n$.

- $\star$ Cas 1 : n pair :

  On obtient : $\boxed{P = n2^n \prod_{k=0,\ k\neq \frac{n}{2}}^{n} \left(X - \frac{\left(3e^{\frac{2ik\pi}{n}}+1\right)e^{\frac{-ik\pi}{n}}}{4\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}\right)}$.
- $\star$ Cas 2 : n impair :

  On obtient : $\boxed{P = 2^{n+1} \prod_{k=0}^{n} \left(X - \frac{\left(3e^{\frac{2ik\pi}{n}}+1\right)e^{\frac{-ik\pi}{n}}}{4\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}\right)}$.

- Factorisation dans $\mathbb{R}$: à ne pas faire.

10.
- Racines complexes de P : On sait que $1+i$ est racine complexe de P. Comme $P \in \mathbb{R}$, on a donc aussi que $1-i$ est racine complexe de P. Ainsi $P = (X-(1+i))(X-(1-i))Q = (X^2-2X+2)Q$ avec Q polynôme de degré 2. En cherchant Q sous la forme $Q = aX^2+bX+c$ et par identification des coefficients d'un polynôme, on obtient : $Q = X^2+5X-6$. Le discriminant vaut $\Delta = 7$ et les racines sont 1 et -6. Ainsi on a trouvé 4 racines pour un polynôme de degré 4, on les a toutes.
- Factorisation dans $\mathbb{C}$: $P = (X-1)(X+6)(X-(1+i))(X-(1-i))$.
- Factorisation dans $\mathbb{R}$: $P = (X-1)(X+6)(X^2-2X+2)$.

Correction 16. Idée : relation coefficients-racines :
On sait que $P = X^3+aX^2+bX+c$ et on sait aussi que u, v et w sont les racines complexes de P ainsi P se factorise sous la forme : $P = (X-u)(X-v)(X-w)$. Il s'agit alors de développer le produit $(X-u)(X-v)(X-w)$ et d'utiliser ensuite l'unicité des coefficients d'un polynôme. On obtient : $(X-u)(X-v)(X-w) = X^3-(u+v+w)X^2+(uv+uw+vw)X-uvw$. Ainsi par identification, on a :

$$u+v+w=-a \qquad uv+uw+vw=b \qquad uvw=-c.$$

Correction 17.

1. On a : $P_3 = 2XP_2 - P_1$, soit $\boxed{P_3 = 4X^2-1}$ et $P_4 = 2XP_3 - P_2 = 2X(4X^2-1)-2X$, soit $\boxed{P_4 = 8X^3-4X}$.
2. **Soit** $\theta \in]0,\pi[$ **et** $n \geq 1$.
   (a) **Montrer que** $\sin(n\theta) = P_n(\cos(\theta))\sin(\theta)$**.**
   Montrons par double récurrence sur $n \in \mathbb{N}^\star$ la propriété H_n : $\sin(n\theta) = P_n(\cos(\theta))\sin(\theta)$.

   - Initialisation : on a d'une part $P_1(\cos\theta)\sin\theta = 1\times\sin\theta = \sin\theta$, et d'autre part $\sin(1\times\theta) = \sin\theta$, donc on a H_1 vraie. De même, on a d'une part $P_2(\cos\theta)\sin\theta = 2\cos\theta\sin\theta = \sin(2\theta)$, et d'autre part $\sin(2\times\theta) = \sin(2\theta)$, donc on a H_2 vraie.
   - Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ fixé, supposons H_n et H_{n+1} vraies. Montrons que H_{n+2} est vraie. On a, par définition de la suite (P_n) :

   $$\begin{aligned} P_{n+2}(\cos\theta)\sin\theta &= (2\cos\theta P_{n+1}(\cos\theta) - P_n(\cos\theta))\sin\theta \\ &= 2\cos\theta P_{n+1}(\cos\theta)\sin\theta - P_n(\cos\theta)\sin\theta \\ &= 2\cos\theta\sin((n+1)\theta) - \sin(n\theta) && \text{par hypothèse de récurrence,} \\ &= \sin(\theta+(n+1)\theta) - \sin(\theta-(n+1)\theta) - \sin(n\theta) && \text{(formule de trigonométrie)} \\ &= \sin((n+2)\theta). \end{aligned}$$

     On a donc H_{n+2} vraie.

   Par principe de récurrence, la propriété H_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\boxed{\sin(n\theta) = P_n(\cos(\theta))\sin(\theta)}$.

   (b) **Déterminer les solutions de l'équation** $\sin(nx) = 0$ **sur** $]0,\pi[$**.**
   On a : $\sin(nx) = 0 \Leftrightarrow nx = k\pi \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{n}$, avec $k \in \mathbb{Z}$. De plus, on a $\frac{k\pi}{n} \in]0,\pi[\Leftrightarrow k \in [\![1, n-1]\!]$.

   Les solutions dans $]0,\pi[$ sont donc : $\boxed{\left\{\frac{k\pi}{n}, k \in [\![1,n-1]\!]\right\}}$.

(c) **En déduire les racines de P_n sur $]-1,1[$. Justifier que les $n-1$ racines trouvées sont 2 à 2 distinctes.**
On cherche à résoudre $P_n(x)=0$ pour $x\in]-1,1[$. Or pour tout $x\in]-1,1[$, il existe un unique $\theta\in]0,\pi[$ tel que $x=\cos(\theta)$. On est donc ramené à résoudre sur $]0,\pi[$ l'équation $P_n(\cos\theta)=0$. Or on a montré que $\sin(n\theta)=P_n(\cos\theta)\sin\theta$, donc comme $\sin\theta\neq 0$ sur $]0,\pi[$, on a $\sin(n\theta)=0 \Leftrightarrow P_n(\cos\theta)=0$. On doit donc résoudre :

$$\sin(n\theta)=0 \Leftrightarrow \theta=\frac{k\pi}{n}, k\in[\![1,n-1]\!]$$

d'après la question précédente. Or $\theta=\dfrac{k\pi}{n} \Leftrightarrow x=\cos\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)$. On en déduit que les racines de P_n sur $]-1,1[$ sont données par : $\boxed{\left\{\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right), k\in[\![1,n-1]\!]\right\}}$.

Ces $n-1$ racines sont bien distinctes 2 à 2 car les $\dfrac{k\pi}{n}$ sont des réels 2 à 2 distincts de $]0,\pi[$, et la fonction cosinus est strictement croissante sur cet intervalle.

3. **Déterminer pour tout $n\geq 1$ le degré et le coefficient dominant de P_n.**
Montrons par double récurrence sur $n\in\mathbb{N}^*$ la propriété suivante : H_n : P_n est un polynôme de degré $n-1$ et de coefficient dominant 2^{n-1}.

- Initialisation : on a $P_1=1$, qui est bien un polynôme de degré 0 et de coefficient dominant $2^0=1$. De même, $P_2=2X$ est un polynôme de degré 1 et de coefficient dominant $2^1=2$.

- Hérédité : soit $n\in\mathbb{N}^*$ fixé, supposons H_n et H_{n+1} vraies. Montrons que H_{n+2} est vraie. On a

$$P_{n+2}=2XP_{n+1}-P_n,$$

donc P_{n+2} est un polynôme comme produit et somme de polynômes. De plus, par hypothèse de récurrence, il existe Q (respectivement R de degré inférieur ou égal à $n-1$ (respectivement $n-2$) tels que $P_{n+1}=2^nX^n+Q$ et $P_n=2^{n-1}X^{n-1}+R$. Donc on a

$$P_{n+2}=2X(2^nX^n+Q)-2^{n-1}X^{n-1}-R,$$

soit

$$P_{n+2}=2^{n+1}X^{n+1}+S$$

avec $S=2XQ-2^{n-1}X^{n-1}-R$ un polynôme de degré inférieur ou égal à n. Donc P_{n+2} est bien de degré $n+1$ et de coefficient dominant égal à 2^{n+1}, et H_{n+2} est démontrée.

Par principe de récurrence, la propriété H_n est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $\boxed{P_n \text{ est un polynôme de degré } n-1 \text{ et de co}}$

4. (a) **Pour tout $n\geq 1$, donner la décomposition du polynôme P_n dans $\mathbb{R}[X]$.**
D'après les questions précédentes, on sait que P_n est de degré $n-1$, et on a trouvé $n-1$ racines à la question 2). Ce sont donc les seules. Comme de plus le coefficient dominant de P_n est 2^{n-1}, on peut factoriser P_n de la façon suivante :

$$\boxed{P_n=2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\left(X-\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right).}$$

(b) **En déduire que pour tout $\theta\in]0,\pi[$, $\dfrac{\sin(n\theta)}{\sin(\theta)}=2^{n-1}\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\left(\cos(\theta)-\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)$.**

Comme $\theta\in]0,\pi[$, on a $\sin\theta\neq 0$, donc on a $P_n(\cos\theta)=\dfrac{\sin(n\theta)}{\sin\theta}$. D'après la factorisation de P_n, on a donc bien :

$$\boxed{\frac{\sin(n\theta)}{\sin\theta}=2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\left(\cos(\theta)-\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right).}$$

5. **Soit $n \geq 1$. Dériver deux fois par rapport à θ la relation obtenue au 2a et en déduire que : $(1-X^2)P_n'' - 3XP_n' + (n^2-1)P_n = 0$.**
On sait que pour tout $\theta \in]0,\pi[$, on a : $\sin(n\theta) = P_n(\cos(\theta))\sin(\theta)$. Tous les membres de cette équation sont dérivables sur $]0,\pi[$ comme composées et sommes de fonctions dérivables. On peut donc dériver cette équation :
$$\begin{aligned} n\cos(n\theta) &= -\sin\theta P_n'(\cos\theta)\sin\theta + P_n(\cos\theta)\cos\theta \\ &= -\sin^2(\theta)P_n'(\cos\theta) + \cos\theta P_n(\cos\theta) \end{aligned}$$
On obtient à nouveau des expressions dérivables comme composées et sommes de fonctions dérivables, donc on dérive à nouveau :
$$\begin{aligned} -n^2\sin(n\theta) &= P_n''(\cos\theta)\sin^3(\theta) - 2\cos\theta\sin\theta P_n'(\cos\theta) - \sin\theta\cos\theta P_n'(\cos\theta) - \sin\theta P_n(\cos\theta) \\ &= P_n''(\cos\theta)\sin^3(\theta) - 3\cos\theta\sin\theta P_n'(\cos\theta) - \sin\theta P_n(\cos\theta) \end{aligned}$$
Or on a $\sin\theta \neq 0$ sur $]0,\pi[$, donc on peut diviser l'équation précédente par $\sin\theta$:
$$P_n''(\cos\theta)\sin^2(\theta) - 3\cos\theta P_n'(\cos\theta) - P_n(\cos\theta) + n^2\frac{\sin(n\theta)}{\sin\theta} = 0.$$
De plus, on a $\sin^2(\theta) = 1-\cos^2(\theta)$, et on a montré que $\dfrac{\sin(n\theta)}{\sin\theta} = P_n(\cos\theta)$ pour tout $\theta \in]0,\pi[$, donc on a :
$$P_n''(\cos\theta)(1-\cos^2(\theta)) - 3\cos\theta P_n'(\cos\theta) + (n^2-1)P_n(\cos\theta) = 0.$$
En posant $x = \cos\theta$, on a donc montré que pour tout $x \in]-1,1[$, on a :
$$P_n''(x)(1-x^2) - 3xP_n'(x) + (n^2-1)P_n(x) = 0.$$
Le polynôme $(1-X^2)P_n'' - 3XP_n' + (n^2-1)P_n$ admet donc une infinité de racines : c'est donc le polynôme nul, et on a bien : $\boxed{(1-X^2)P_n'' - 3XP_n' + (n^2-1)P_n}$.

Correction 18.

1. On cherche les racines complexes, soi $z \in \mathbb{C}$ tel que :
$$P(z) = 0 \Leftrightarrow (z+1)^n = 1 \Leftrightarrow z+1 = e^{i\frac{2k\pi}{n}} \Leftrightarrow z = 2i\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)e^{i\frac{k\pi}{n}}, \quad \text{avec } k \in [\![0,n-1]\!].$$
On a utilisé en particulier l'expression des racines n-ièmes de l'unité et la méthode de l'angle moitié. Comme le coefficient dominant de P vaut 1, on en déduit la factorisation suivante :
$$P = \prod_{k=0}^{n-1}\left(X - 2i\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)e^{i\frac{k\pi}{n}}\right)$$

2. ⋆ En prenant $k=0$, on remarque que 0 est racine de P, et que P se factorise sous la forme
$$P = X\prod_{k=0}^{n-1}\left(X - 2i\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)e^{i\frac{k\pi}{n}}\right) = XQ,$$
et les racines de Q sont donc : $2i\sin\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)e^{i\frac{k\pi}{n}}$ avec $k \in [\![1,n-1]\!]$.
On en déduit que le produit des racines de Q vaut :
$$\begin{aligned} B = \prod_{k=1}^{n-1} 2i\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)e^{i\frac{k\pi}{n}} &= 2^{n-1}(i)^{n-1}e^{\frac{i\pi}{n}(1+\cdots+(n-1))} \times A \\ &= 2^{n-1}(i)^{n-1}e^{\frac{i\pi n(n-1)}{2n}} \times A \\ &= 2^{n-1}(i)^{n-1}e^{\frac{i\pi(n-1)}{2}} \times A \\ &= 2^{n-1}(i)^{n-1}(i)^{n-1} \times A \;=\; 2^{n-1}(-1)^{n-1}A. \end{aligned}$$

⋆ De plus, en utilisant la formule du binôme de Newton, on obtient que :

$$P = X^n + nX^{n-1} + \cdots + nX + 1 - 1 = X\left(X^{n-1} + nX^{n-2} + \cdots + n\right)$$

et ainsi $Q = X^{n-1} + nX^{n-2} + \cdots + n$.

⋆ Les relations coefficients-racines appliquées au polynôme Q donnent alors que :

$$\begin{aligned} B &= \frac{(-1)^{n-1}\text{coeff constant de } Q}{\text{coeff dominant de } Q} \\ \Leftrightarrow & \prod_{k=1}^{n-1} 2i\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)e^{i\frac{k\pi}{n}} = (-1)^{n-1}n \\ \Leftrightarrow & 2^{n-1}(-1)^{n-1}A = (-1)^{n-1}n. \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient que $\boxed{A = \frac{n}{2^{n-1}}}$.

V Résolutions d'équations avec des polynômes

Correction 19.

1. • On cherche donc P sous la forme $P = aX^4 + bX^3 + cX^3 + dX + e$ vérifiant : $P - P(X+1) = X^3$. On commence par calculer $P - P(X+1)$ et on obtient : $P - P(X+1) = -4aX^3 + (-6a - 3b)X^2 + (-4a - 3b - 2c)X - a - b - c - d$. Comme on veut $P - P(X+1) = X^3$, par unicité des coeficients d'un polynôme, on obtient le système suivant à résoudre : $\begin{cases} -4a &= 1 \\ -6a - 3b &= 0 \\ -4a - 3b - 2c &= 0 \\ -a - b - c - d &= 0 \end{cases}$ La résolution donne : $a = -\frac{1}{4}$, $b = \frac{1}{2}$, $c = -\frac{1}{4}$ et $d = 0$. Il n'y a pas de condition sur e que l'on prend donc égal à 0. Ainsi, on a : $P = -\frac{1}{4}X^4 + \frac{1}{2}X^3 - \frac{1}{4}X^2$.
   • Comme l'égalité démontrée ci-dessus est une égalité entre deux polynômes, elle est en particulier vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$, à savoir : $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) - P(x+1) = x^3$. En particulier elle est aussi vraie pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, à savoir : $P(k) - P(k+1) = k^3$. Ainsi, on a : $\sum_{k=0}^{n} k^3 = \sum_{k=0}^{n} P(k) - P(k+1) = \sum_{k=0}^{n} P(k) - \sum_{k=0}^{n} P(k+1)$ par linéarité. On reconnaît alors une somme télescopique et on obtient : $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \sum_{k=0}^{n} P(k) - \sum_{k=1}^{n+1} P(k) = P(0) - P(n+1)$. Mais on connaît aussi l'expression de P et ainsi, on obtient : $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{1}{4}(n+1)^4 - \frac{1}{2}(n+1)^3 + \frac{1}{4}(n+1)^2 = \frac{(n+1)^2}{4}\left((n+1)^2 - 2(n+1) + 1\right) = \frac{(n(n+1))^2}{4}$. On retrouve ainsi l'expression connue.
2. C'est exactement la même chose. A faire.

Correction 20.

1. Soit $P \in \mathbb{R}$, on a alors que : $\varphi(P) = (3X+1)P - X(X+1)P'$. Comme P est un polynôme et que la dérivée d'un polynôme est un polynôme, on sait que $P' \in \mathbb{R}$. De plus $3X+1$ et $X(X+1)$ sont aussi des polynômes et ainsi $\varphi(P)$ est un polynôme comme produit et somme de polynômes. Donc si $P \in \mathbb{R}$ alors $\varphi(P) \in \mathbb{R}$.

2. (a) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on cherche à savoir sous quelles conditions, on a aussi $\varphi(P) \in \mathbb{R}_n[X]$. Il faut donc étudier le degré de $\varphi(P)$ sachant que $P = a_n X^n + Q$ avec $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $a_n \neq 0$. Par définition de $\varphi(P)$, on a : $\deg \varphi(P) \leq n+1$. En effet, par propriété sur le degré d'un produit, d'une dérivée et d'une somme de polynômes de même degré, on a : $\deg(3X+1)P = n+1$, $\deg X(X-1)P' = n+1$ et ainsi $\deg \varphi(P) \leq n+1$. On obtient que : $\varphi(P) = (3X+1)(a_n X^n + Q) - X(X-1)(n a_n X^{n-1} + Q')$. Étudions le terme en X^{n+1} afin de voir sous quelle condition le coefficient devant ce terme s'annule. On a : $\varphi(P) = 3a_n X^{n+1} - n a_n X^{n+1} + R$ avec $R \in \mathbb{R}_n[X]$. Pour que $\deg \varphi(P) \leq n$, on doit donc avoir : $(3-n)a_n = 0$. Comme $a_n \neq 0$, cela impose que $n = 3$ et ainsi cela impose que le degré de P soit 3. Ainsi $\varphi(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_n[X]$ si et seulement si $n = 3$.

   (b) P est donc un polynôme de degré 3 et ainsi il est de la forme : $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$. On cherche alors à résoudre $\varphi(P) = 0 \Leftrightarrow (3X+1)P - X(X-1)P' = 0$. Les calculs donnent : $(b+4a)X^3 + (2c+3b)X^2 + (3d+2c)X + d = 0$. Puis par unicité des coefficients d'un polynôme, on obtient : $a = b = c = d = 0$ et ainsi seul le polynôme nul convient.

3. Les deux questions précédentes ont permis de montrer que si $n \neq 3$ et $\deg P = n$ alors $\deg(\varphi(P)) = n+1$ et si $n = 3$ alors $\varphi(P) \in \mathbb{R}_3[X]$. Ainsi pour que $\varphi(P) = X^2$, il faut soit que $\deg P = 1$, soit que $\deg P = 3$. On étudie ainsi chacun de ces cas :
   - Cas 1 : si $n = 1$: $P = aX + b$:
     On doit donc avoir : $(3X+1)(aX+b) - X(X-1)a = X^2$ et en développant le terme de gauche et par identification des coefficients d'un polynôme, on obtient le système linéaire suivant à résoudre : $\begin{cases} 2a & = 1 \\ 2a+3b & = 0 \\ b & = 0 \end{cases}$. Ce système est incompatible et ainsi il n'existe aucun P de degré 1 vérifiant $\varphi(P) = X^2$.
   - Cas 2 : si $n = 3$: $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$:
     En reprenant les mêmes calculs que dans la questions 2(a), on a : $(b+4a)X^3 + (2c+3b)X^2 + (3d+2c)X + d = X^2$ et on doit donc résoudre le système suivant : $\begin{cases} b+4a & = 0 \\ 2c+3b & = 1 \\ 3d+2c & = 0 \\ d & = 0 \end{cases}$. La résolution donne : $a = -\dfrac{1}{12}$, $b = \dfrac{1}{3}$ et $c = d = 0$. Ainsi on obtient qu'il existe un seul polynôme P vérifiant $\varphi(P) = P^2$, le polynôme : $P = -\dfrac{1}{12}X^3 + -\dfrac{1}{3}X^2$.

Correction 21.

1. On suppose que $P \in \mathbb{R}$ vérifie $P(X^2) = (1+X^2)P$. Condition sur le degré : Le polynôme nul convient bien. Sinon, si P est de degré n, alors on a : $\deg P(X^2) = 2n$ et $\deg((1+X^2)P) = 2+n$ par propriétés sur le degré d'un produit et d'une composée. Ainsi, on doit avoir : $2n = n+2 \Leftrightarrow n = 2$. Ainsi P est un polynôme de degré 2 : $P = aX^2 + bX + c$ avec $a \neq 0$.
2. Identification des coefficients : On a donc d'un côté : $P(X^2) = aX^4 + bX^2 + c$ et de l'autre côté : $(1+X^2)P = aX^4 + bX^3 + (a+c)X^2 + bX + c$. Par identification des coefficents d'un polynôme, on obtient que : $\begin{cases} a & = a \\ b & = 0 \\ a+c & = b \\ c & = c \end{cases}$. Ainsi, on obtient que $b = 0$ et $a = -c$ et P est de la forme $P = aX^2 - a = a(X^2-1)$ avec $a \in \mathbb{R}$.
   Synthèse : soit $P = a(X^2-1)$ avec $a \in \mathbb{R}$. Il vérifie bien $P(X^2) = (1+X^2)P$. Ainsi les polynômes vérifiant la relation sont exactement les polynômes de type $a(X^2-1)$ avec $a \in \mathbb{R}$.
3. On veut retrouver ce résultat d'une autre manière. On cherche donc les deux racines de P : montrons que 1 et -1 conviennent. On a :
$$P(1^2) = (1^2+1)P(1) \;\Rightarrow\; P(1) = 2P(1) \;\Rightarrow\; P(1) = 0,$$

donc 1 est bien racine de P. De même :

$$P((-1)^2) = ((-1)^2+1)P(-1) \Rightarrow P(1) = 2P(-1) \Rightarrow P(-1) = \frac{P(1)}{2} = 0,$$

donc -1 est bien racine de P. On sait que P est de degré 2, donc on a trouvé toutes les racines, et P peut donc s'écrire $P = a(X-1)(X+1)$, avec $a \in \mathbb{R}^\star$. On retrouve bien que les solutions sont les polynômes de la forme $\boxed{P = a(X^2-1), \text{ avec } a \in \mathbb{R}^\star}$.

Correction 22.

1. - Analyse : soit $P \in \mathbb{R}$ vérifiant : $P = XP'$. On remarque tout de suite que le polynôme nul convient et ainsi on peut prendre $P \in \mathbb{R}$ polynôme non nul vérifiant $P = XP'$. On pose ainsi $n = \deg P$ et $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $a_n \neq 0$.
     - ⋆ On peut commencer par regarder si l'équation vérifiée par P impose des conditions sur le degré de P. D'un côté, on a : $\deg P = n$ et de l'autre côté, on a par propriété sur le degré d'une dérivée et d'un produit de polynômes : $\deg XP' = 1 + (n-1) = n$. Donc l'équation n'impose aucune condition sur le degré de P.
     - ⋆ Identification des coefficients : en effet, on a d'un côté : $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et de l'autre côté : $XP' = X \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^k$. Ainsi, on a l'égalité de polynômes suivante :

       $$a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X3 + \cdots + a_{n-1}X^{n-1} + a_nX^n = a_1X + 2a_2X^2 + 3a_3X^3 + \cdots + (n-1)a_{n-1}X^{n-1} + na_nX^n.$$

       Puis par unicité des coefficients d'un polynôme, on obtient que : $a_0 = 0$, $a_1 = a_1$, $a_2 = 2a_2 \Leftrightarrow a_2 = 0$, $a_3 = 3a_3 \Leftrightarrow a_3 = 0, \ldots, a_{n-1} = (n-1)a_{n-1} \Leftrightarrow a_{n-1} = 0$ et $a_n = na_n \Leftrightarrow a_n = 0$. Ainsi P est de la forme : $P = a_1X$.
   - Synthèse : soit P de la forme $P = aX$ avec $a \in \mathbb{R}$ (le polynôme nul est ainsi pris en compte puisque a peut être nul). On a donc $XP' = X \times a = aX = P$. Donc $P = aX$ vérifie bien l'équation $P = XP'$. Ainsi l'ensemble des polynômes vérifiant $P = XP'$ sont les polynômes de la forme $P = aX$ avec $a \in \mathbb{R}$.
2. - Analyse : soit $P \in \mathbb{R}$ vérifiant : $(2X^2-3)P'' - 6P = 0$. On remarque tout de suite que le polynôme nul convient et ainsi on peut prendre $P \in \mathbb{R}$ polynôme non nul vérifiant $(2X^2-3)P'' = 6P$. On pose ainsi $n = \deg P$ et $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $a_n \neq 0$.
     - ⋆ On peut commencer par regarder si l'équation vérifiée par P impose des conditions sur le degré de P. D'un côté, on a : $\deg 6P = n$ et de l'autre côté, on a par propriété sur le degré d'une dérivée et d'un produit de polynômes : $\deg (2X^2-3)P'' = 2 + (n-2) = n$. Donc l'équation n'impose aucune condition sur le degré de P.
     - ⋆ On peut ensuite regarder ce que cette équation impose au niveau du coefficient de plus haut degré. On a : $P = a_nX^n + T$ avec $T \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Ainsi $P'' = n(n-1)a_nX^{n-2} + T''$ avec $T'' \in \mathbb{R}_{n-3}[X]$. Ainsi, on a : $(2X^2-3)(n(n-1)a_nX^{n-2} + T'') = a_nX^n + T$. Et par unicité des coefficients d'un polynôme, on obtient que : $2n(n-1)a_n = 6a_n \Leftrightarrow (n^2-n-3)a_n = 0$. Comme $a_n \neq 0$, on doit avoir : $n^2 - n - 3 = 0$. Le discriminant vaut 13 et les racines ne sont donc pas entières. Ainsi, il n'existe aucun $n \in \mathbb{N}$ tel que : $2n(n-1)a_n = 6a_n$.

     Ainsi il n'existe aucun polynôme non nul vérifiant $(2X^2-3)P'' - 6P = 0$.
   - Synthèse : Seul le polynôme nul vérifie $(2X^2-3)P'' - 6P = 0$.
3. - Analyse : soit $P \in \mathbb{R}$ vérifiant $P(n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi P admet une infinité de racines car il admet tous les entiers naturels comme racines. Donc P est le polynôme nul.
   - Synthèse : Le polynôme nul vérifie bien que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $P(n) = 0$. Donc le seul polynôme vérifiant cela est bien le polynôme nul.
4. - Analyse : soit $P \in \mathbb{R}$ vérifiant $P(X+1) = -P$. On peut tout de suite remarquer que le polynôme nul convient. Soit alors $P \in \mathbb{R}$ non nul et de degré n.

- ⋆ Étude du degré : d'un côté, par propriété sur le degré d'une composée, on a : $\deg P(X+1) = \deg P$ et de l'autre côté, on a : $\deg P$. Ainsi l'équation vérifiée par P n'impose aucune condition sur le degré du polynôme.
- ⋆ Étude des racines : on remarque que $P(1) = -P(0)$, puis : $P(2) = -P(1)$ donc $P(2) = P(0)$. De même : $P(3) = -P(2)$ donc $P(3) = P(1)$. Ainsi on remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $P(2n) = P(0)$ et $P(2n+1) = P(1)$. On pose alors les polynômes : $Q = P - P(0)$ et $R = P - P(1)$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $Q(2n) = P(2n) - P(0) = 0$ et $R(2n+1) = P(2n+1) - P(1) = 0$. Ainsi tous les entiers naturels pairs sont racines de Q et tous les entiers naturels impairs sont racines de R. Ainsi Q et R possèdent tous les deux une infinité de racines et ils sont donc tous les deux nuls : $Q = 0 \Leftrightarrow P = P(0)$ et $R = 0 \Leftrightarrow P = P(1)$. Ainsi, on doit avoir : $P = P(0) = P(1)$. Mais comme de plus : $P(1) = -P(0)$, on doit avoir : $P = P(0) = -P(0)$ donc P est le polynôme nul.

- Synthèse : Le polynôme nul vérifie bien $P(X+1) = -P$. Donc le seul polynôme vérifiant cela est bien le polynôme nul.