Programme de colle : Semaine 18
Lundi 26 février

I Cours

1. Limites
   (a) Définition des limites en un point et en l'infini avec les quantificateurs. Limites à gauche et limites à droite.
   (b) Calcul sur les limites : sommes, produits, composition de limites.
   (c) Caractérisation d'une limite en terme de suites convergentes. Contraposée pour montrer que des fonctions n'admettent pas de limites
   (d) Limites et inégalités : passage aux inégalités larges, théorème d'encadrement, théorème de comparaison.
   (e) Limite d'une fonction monotone.
   (f) Etudes des branches infinies d'une fonction : asymptote verticale, droite asymptotique. Position du graphe par rapport à la tangente.
   (g) Théorème des croissances comparées. Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$, on a :
      - $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(\ln x)^b}{x^a} = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} x^a (\ln x)^b = 0$
      - $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^a}{e^{bx}} = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x^a e^{bx} = 0$
2. Equivalents
   (a) Définition des équivalents $\lim \frac{f}{g} = 1$. Par définition $f \sim 0$ n' a pas de sens.
   (b) Opérations algébriques : produit, quotient, mis à la puissance.
   (c) On ne compose pas un équivalent avec une fonction –> Contre exemple avec exp. Par contre on peut faire un changement de variable (appelé substitution dans le cours) : Soit $t_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Soient $f,\ g$ deux fonctions définies sur I et soit u une fonction définie sur un voisinage de t_0 et telle que $\lim\limits_{t \to t_0} u(t) = x_0$. Alors
   $$f \underset{x_0}{\sim} g \implies f \circ u \underset{t_0}{\sim} g \circ u.$$
   (d) Equivalents usuels :
      - $\sin x \underset{0}{\sim} x$
      - $\cos x - 1 \underset{0}{\sim} \frac{-x^2}{2}$
      - $\tan x \underset{0}{\sim} x$
      - $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$
      - $e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$
      - $(1+x)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} \alpha x$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^\star$.

      — Utilisation de la négligeabilité : $f(x) \underset{x_0}{=} o(g(x))$, lien avec les équivalents.
   (e) Polynômes
      — Definition d'un polynôme en tant que fonction polynomiale de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)
      — Unicité des coefficients.
      — Définition du degré.
3. Informatique
   (a) Parcours de listes.
   (b) Chaînes de caractères.
   (c) Tableau numpy

II Exercices Types

Exercice 1. *Calculer les limites et un équivalent simpledes fonctions suivantes aux bornes de leur domaine de définition. Interpretation géométrique le cas échéant.*

1. $f(x) = e^{x^2+x+1}$
2. $f(x) = e^{2x} - e^x$
3. $f(x) = \dfrac{e^x + x^2 + x + 1}{e^{2x}+1}$
4. $f(x) = \dfrac{x}{x-1}e^{\frac{1}{x}}$
5. $f(x) = e^{x^2} - e^{x+1}$
6. $f(x) = \ln\left(\dfrac{e^x+1}{e^x-1}\right)$
7. $f(x) = \ln\left(\dfrac{e^x+x^2}{2x+1}\right)$
8. $f(x) = \ln\left(\dfrac{2-x}{x+4}\right)$
9. $f(x) = \dfrac{2^x}{x^2+1}$
10. $f(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x \ln x$
11. $f(x) = \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{x^2}$
12. $f(x) = e^x - x^{\frac{2}{3}}$
13. $f(x) = e^{\frac{1}{x-2}}$
14. $f(x) = (2x-1)e^{\frac{1}{x-2}}$
15. $f(x) = \dfrac{\ln(x^2+1)}{x}$

Exercice 2. *Déterminer pour chacune des fonctions suivantes l'ensemble de définition ainsi que les asymptotes et les branches infinies. On étudiera de plus la position relative de la courbe associée à la fonction par rapport à ses asymptotes.*

1. $f(x) = \dfrac{3x^2-4}{(x-2)^2(x+1)}$
2. $f(x) = x + \ln(2-e^x)$
3. $f(x) = xe^{-x}$
4. $f(x) = x - \cos x$
5. $f(x) = \dfrac{\ln x - x^2 - 1}{x}$
6. $f(x) = \ln(\ln(x))$
7. $f(x) = x + \ln(x^2-1)$

Exercice 3. *Calculer les limites suivantes*

1. $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \sin x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$
3. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x\sin x}{x^2+1}$
4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x - \sin x}{x^3}$
5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(2x)}{\sqrt{1-\cos(3x)}}$
6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(6x)}{\tan(4x)}$
7. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\tan x - \sin x}{x}\right)^{x^2}$

Exercice 4. *Montrer qu'un polynôme de degré impair admet au moins une racine réelle.*