Correction - DM7

Exercice 1. 1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'équation $x^3 + nx = 1$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}^+$. On la note x_n.

2. Montrer que $x_{n+1}^3 + nx_{n+1} - 1 < 0$.
3. En déduite que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
4. Justifier que la suite est minorée par 0 et majorée par 1.
5. En déduire que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
6. A l'aide d'un raisonement par l'absurde justifier que cette limite vaut 0.

Correction 1.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note $f_n(x) = x^3 + nx - 1$. C'est un polynome de degré 3, il est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a
$$f'(x) = 3x^2 + n$$
Comme $n \geq 0$, la dérivée est strictement positive sur $\mathbb{R}$ et ainsi la fonction f_n est strictement croissante.
On a par ailleurs $f_n(0) = -1$ et $f_n(1) = n \geq 1$. Comme f_n est continue sur $[0, 1]$ et strictement croissante on peut appliquer le théorème de la bijection pour la valeur $0 \in [f_n(0), f_n(1)] = [-1, 1]$. Ce théorème assure qu'il existe un unique réel $x_n \in [0, 1]$ tel que $f_n(x_n) = 0$.
2. On calcule $f_n(x_{n+1}) = x_{n+1}^3 + nx_{n+1} - 1$, on va montrer que $f_n(x_{n+1}) < 0$. Or par définition de x_{n+1} on a $f_{n+1}(x_{n+1}) = 0$ ce qui donne :
$$x_{n+1}^3 + (n + 1)x_{n+1} - 1 = 0$$
Donc $x_{n+1}^3 + nx_{n+1} - 1 = -x_{n+1}$
Finalement en remplaçant dans la première égalité on obtient :
$$f_n(x_{n+1}) = -x_{n+1}$$
Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \geq 0$ d'après la première question,on a bien
$$f_n(x_{n+1}) < 0$$
3. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est strictement croissante, et $f_n(x_{n+1}) \leq f_n(x_n)$ on a
$$x_{n+1} \leq x_n$$
Ainsi, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
4. Le raisonement effectué à la question 1 montre que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0 et majorée par 1.
5. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée. Le théorème de la limite monotone assure que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Notons $\ell \in \mathbb{R}$ cette limite.
6. Comme $x_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\lim x_n \geq 0$.. Supposons par l'absurde que $\ell > 0$.
On a alors d'une par $f_n(x_n) = 0$ donc $\lim x_n^3 + nx_n - 1 = 0$. Par ailleurs, $\lim x_n^3 - 1 = \ell^3 - 1$ et $\lim nx_n = +\infty$. Donc $\lim x_n^3 + nx_n - 1 = +\infty$. Comme $0 \neq +\infty$ et que la limite est unique, c'est une contradiction. Ainsi $\ell = 0$.

Exercice 2. On définit la fonction *sinus hyperbolique* de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ par

$$\forall z \in \mathbb{C}, \sinh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

1. Etude de la fonction sinh sur $\mathbb{C}$.
   (a) Que vaut $\sinh(z)$ quand z est imaginaire pur ?
   (b) La fonction sinh est elle injective ?
2. On note sh la restriction de la fonction sinh à $\mathbb{R}$:

$$\text{sh} : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{e^x - e^{-x}}{2} \end{array} \right.$$

   Etude de la fonction sh sur $\mathbb{R}$.
   (a) Etudier la fonction sh.
   (b) Montrer que sh réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un ensemble que l'on précisera.
3. Etude de la réciproque. On note argsh : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la bijection réciproque de sh.
   (a) Comment obtenir la courbe représentative de argsh à partir de celle de sh.
   (b) On note $\text{ch}(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = 1$
   (c) Démontrer que argsh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que l'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \text{argsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

   (d) En résolvant $y = \text{sh}(x)$ déterminer l'expression de $\text{argsh}(y)$ en fonction de y et retrouver ensuite le résultat de la question précédente.
4. Etudier la limite de $\text{argsh}(x) - \ln(x)$ quand $x \to +\infty$.

Correction 2.

1. (a) Soit z un imaginaire pur, il existe donc $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = i\theta$. On a alors $\sinh(z) = \sinh(i\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2} = i\sin(\theta)$ d'après les formules d'Euler.
   (b) En particulier la fonction sinh n'est pas injective sur $\mathbb{C}$: on a $\sinh(0) = \sinh(2i\pi) = 0$.
2. (a) La fonction sh est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Sa dérivée vaut pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\text{sh}'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$. Comme l'exponentielle est psitive sur $\mathbb{R}$, $\text{sh}'(x) > 0$ et la fonction est donc strictement croissante.
   (b) Ses limites valent $\lim_{x \to +\infty} \text{sh}(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to -\infty} \text{sh}(x) = -\infty$. Comme sh est continue, le théorème de la bijection assure que sh est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
3. (a) C'est du cours : il suffit de faire la symétrie par rapport à la première diagonale, la droite d'équation $y = x$.
   (b) Soit $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$\begin{aligned} \text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) &= \frac{(e^x + e^{-x})^2}{4} - \frac{(e^x - e^{-x})^2}{4} \\ &= \frac{(e^{2x} + 2e^0 + e^{-2x})}{4} - \frac{(e^{2x} - 2e^0 + e^{-2x})}{4} \\ &= \frac{4}{4} = 1 \end{aligned}$$

(c) La fonction argsh est dérivable car sh est dérivable de dérivée non nulle sur $\mathbb{R}$. Sa dérivée vérifie :

$$\operatorname{argsh}'(x) = \frac{1}{\operatorname{sh}'(\operatorname{argsh}(x))}$$

Or le calcul montre que $\operatorname{sh}'(x) = \operatorname{ch}(x)$, comme de plus $\operatorname{ch}(x) = \sqrt{1+\operatorname{sh}^2(x)}$ d'après la question précédente on a :

$$\operatorname{argsh}'(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}(\operatorname{argsh}(x))} = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{sh}^2(\operatorname{argsh}(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

(d) On résout $y = \operatorname{sh}(x)$. On obtient :

$$\begin{aligned} y &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ 2ye^x &= e^{2x} - 1 \\ e^{2x} - 2ye^x - 1 &= 0 \end{aligned}$$

En posant $u = e^x$, on obtient une équation du second degré $u^2 - 2yu - 1 = 0$ qui admet deux racines réelles :

$$u_+ = y + \sqrt{y^2+1} \quad \text{et} \quad u_- = y - \sqrt{y^2+1}$$

Comme u_- est négatif et que l'on a posé $u = e^x$ la seule solution de $e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0$ est $e^x = y + \sqrt{y^2+1}$, autrement dit

$$x = \ln(y + \sqrt{y^2+1}).$$

En d'autres termes, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{argsh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$$

On retrouve que cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée vaut

$$\begin{aligned} \operatorname{argsh}'(x) &= \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right) \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \\ &= \left(\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}\right) \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \end{aligned}$$

4. Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ on a

$$\begin{aligned} \operatorname{argsh}(x) - \ln(x) &= \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) - \ln(x) \\ &= \ln\left(\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x}\right) \\ &= \ln\left(1 + \sqrt{+\frac{1}{x^2}}\right) \end{aligned}$$

Comme $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ on a

$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{argsh}(x) - \ln(x) = \ln(2).$$