

DM7

- Exercice 1.**
1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'équation $x^3 + nx = 1$ admet une unique solution dans \mathbb{R}^+ . On la note x_n .
 2. Montrer que $x_{n+1}^3 + nx_{n+1} - 1 < 0$.
 3. En déduite que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
 4. Justifier que la suite est minorée par 0 et majorée par 1.
 5. En déduire que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
 6. A l'aide d'un raisonnement par l'absurde justifier que cette limite vaut 0.

Exercice 2. On définit la fonction *sinus hyperbolique* de \mathbb{C} dans \mathbb{C} par

$$\forall z \in \mathbb{C}, \sinh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

1. Etude de la fonction \sinh sur \mathbb{C} .
 - (a) Que vaut $\sinh(z)$ quand z est imaginaire pur ?
 - (b) La fonction \sinh est elle injective ?
2. On note sh la restriction de la fonction \sinh à \mathbb{R} :

$$\text{sh} : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{e^x - e^{-x}}{2} \end{cases}$$

Etude de la fonction sh sur \mathbb{R} .

- (a) Etudier la fonction sh .
 - (b) Montrer que sh réalise une bijection de \mathbb{R} sur un ensemble que l'on précisera.
3. Etude de la réciproque. On note $\text{argsh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la bijection réciproque de sh .
 - (a) Comment obtenir la courbe représentative de argsh à partir de celle de sh .
 - (b) On note $\text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = 1$
 - (c) Démontrer que argsh est dérivable sur \mathbb{R} et que l'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \text{argsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

- (d) En résolvant $y = \text{sh}(x)$ déterminer l'expression de $\text{argsh}(y)$ en fonction de y et retrouver ensuite le résultat de la question précédente.
4. Etudier la limite de $\text{argsh}(x) - \ln(x)$ quand $x \rightarrow +\infty$.