Correction DS6

Exercice 1. On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{e^x}{e^{2x}+1}$.

1. (a) Donner le tableau de variations avec les limites aux bornes de la fonction f.
   (b) Donner l'équation de la tangente en 0 à la courbe représentative de f.
   (c) La fonction f est-elle injective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$? Est-elle surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$? On justifiera correctement les réponses.
   (d) Calculer $f(\mathbb{R})$.
2. (a) Montrer que f est bijective de $\mathbb{R}^+$ sur un ensemble F à préciser. On appelle g la restriction de f à ces ensembles, c'est-à-dire :

$$g \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & F \\ x & \mapsto & \dfrac{e^x}{e^{2x}+1} \end{array} \right.$$

   (b) Calculer $g^{-1}(\frac{1}{4})$

Correction 1.

1. **Étude de la fonction $\mathbf{f : x \mapsto \dfrac{e^x}{e^{2x}+1}}$:**
   (a) **Domaine de définition :**
   La fonction f est bien définie si et seulement si $e^{2x}+1 \neq 0 \Leftrightarrow e^{2x} \neq -1$. Ce qui est toujours vrai car une exponentielle est strictement positive. Ainsi $\boxed{\mathcal{D}_f = \mathbb{R}.}$ **Étude des variations :**
   La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $f'(x) = \dfrac{e^x(1-e^{2x})}{(e^{2x}+1)^2}$. Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $e^x > 0$ et $(e^{2x}+1)^2 > 0$, le signe de f' ne dépend que du signe de $1 - e^{2x}$.
   Étude du signe de $1-e^{2x}$ sur $\mathbb{R}$: $1 - e^{2x} > 0 \Leftrightarrow 1 > e^{2x} \Leftrightarrow 0 > 2x \Leftrightarrow 0 > x$ en utilisant le fait que la fonction $\ln$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+\star}$.
   On obtient ainsi le tableau des variations de f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0

   Justification des limites aux bornes du domaine de définition :
   - Étude en $-\infty$: $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0}$ par propriété sur les composée, somme et quotient de limites.
   - Étude en $+\infty$: On obtient une FI et on lève l'indétermination en mettant en facteur le terme dominant au numérateur et au dénominateur. On obtient alors : $f(x) = \dfrac{e^x}{e^{2x}(1+e^{-2x})} = e^{-x}\dfrac{1}{1+e^{-2x}}$. Ainsi par propriété sur les composée, somme, quotient et produit de limites, on obtient que : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0.}$

(b) **Équation de la tangente en 0 à $\mathcal{C}_\mathbf{f}$:**
La fonction f est dérivable en 0 donc la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 0 existe et son équation est donnée par : $y = f'(0)x + f(0)$. Comme $f(0) = \dfrac{1}{2}$ et $f'(0) = 0$, on obtient : $\boxed{y = \dfrac{1}{2}}$: tangente horizontale.

(c) **Étude de l'injectivité et de la surjectivité de la fonction f :**

- $\boxed{\text{La fonction } f \text{ n'est pas injective de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R}.}$ Vérifions par exemple que $\dfrac{1}{4}$ a deux antécédents par f : on cherche pour cela à résoudre l'équation $f(x) = \dfrac{1}{4}$. On obtient : $f(x) = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow e^{2x} - 4e^x + 1 = 0$. On pose alors $X = e^x$ et on doit résoudre : $X^2 - 4X + 1 = 0$. On obtient l'existence de deux solutions $X_1 = 2 + \sqrt{3} > 0$ et $X_2 = 2 - \sqrt{3} > 0$. Ainsi, on doit résoudre : $e^x = 2 + \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \ln(2 + \sqrt{3})$ et $e^x = 2 - \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \ln(2 - \sqrt{3})$. On obtient donc bien deux solutions réelles et ainsi $\dfrac{1}{4}$ a deux antécédents par f et la fonction f n'est donc pas injective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
- $\boxed{\text{La fonction } f \text{ n'est pas surjective de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R}}$: vérifions par exemple que -1 n'a pas d'antécédent par f. En effet, on a : pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) > 0$. Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) \neq -1$ et -1 n'a donc pas d'antécédent par f. Ceci prouve bien que la fonction f n'est pas surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

(d) **Calculons f**$(\mathbb{R})$ Le tableau de variations montre que

$$\boxed{f(\mathbb{R}) =]0, \tfrac{1}{2}]}$$

2. **Étude de la fonction réciproque :**

(a) **Montrons que f est bijective de $\mathbb{R}^+$ sur $\left]0, \dfrac{1}{2}\right]$:**

- La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^+$ comme composée, somme et quotient de fonctions continues.
- La fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$.
- $f(0) = \dfrac{1}{2}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

Ainsi d'après le théorème de la bijection,

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est bijective de } \mathbb{R}^+ \text{ sur } \left]0, \dfrac{1}{2}\right].}$$

(b) **Calcul de $f^{-1}(\frac{1}{4})$:**
$g^{-1}(\frac{1}{4}) = x \Longleftrightarrow g(x) = \frac{1}{4}$ et $x \in \mathbb{R}^+$
On cherche donc à résoudre $\frac{e^x}{e^{2x}+1} = \frac{1}{4}$. On obtient donc

$$e^{2x} - 4e^x + 1 = 0 \quad (*)$$

En posant $X = e^x$ l'équation devient

$$X^2 - 4X + 1 = 0$$

dont les solutions sont

$$2 + \sqrt{3} \quad \text{et} \quad 2 - \sqrt{3}$$

Ainsi les solutions de $(*)$ sont

$$\ln(2 + \sqrt{3}) \quad \text{et} \quad \ln(2 - \sqrt{3})$$

Remarquons maintenant que $2+\sqrt{3}>1$ et $2-\sqrt{3}<1$ et donc

$$\ln(2+\sqrt{3})>0 \quad \text{et} \quad \ln(2-\sqrt{3})<0$$

Comme $g^{-1}(\frac{1}{4})>0$ on obtient

$$\boxed{g^{-1}(\tfrac{1}{4})=\ln(2+\sqrt{3})}$$

Exercice 2. On considère $S=\{z\in\mathbb{C}\,|\,|z|=2\}$.

1. Rappeler la nature géométrique de S.

   Soit $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ la fonction définie par $f(z)=\frac{2z+1}{z+1}$. Déterminer D_f le domaine de définition de f. Est-elle bien définie pour tous les points de S ?
2. (a) Soit $(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2$, montrer que

   $$|z_1+z_2|^2=|z_1|^2+2\mathfrak{Re}(z_1\overline{z_2})+|z_2|^2$$

   (b) Montrer que pour tout z dans l'ensemble de définition de f,

   $$\left|f(z)-\frac{7}{3}\right|^2=\frac{|z|^2+8\mathfrak{Re}(z)+16}{9(|z|^2+2\mathfrak{Re}(z)+1)}$$

   (c) On note S_2 le cercle de centre le point d'affixe $7/3$ et de rayon $\frac{2}{3}$. Montrer que $f(S)\subset S_2$

Correction 2.

1. S est le cercle de centre 0 et de rayon 2. f est définie pour tout $z\in\mathbb{C}\setminus\{-1\}$. Or $|-1|=1\neq 2$ donc f est définie pour tous les points de S.
2. (a)

   $$\begin{aligned}|z_1+z_2|^2&=(z_1+z_2)\overline{(z_1+z_2)}\\&=(z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2})\\&=z_1\overline{z_1}+\overline{z_1}z_2+z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_2}\\&=|z_1|^2+\overline{z_1\overline{z_2}}+z_1\overline{z_2}+|z_2|^2\\&=|z_1|^2+2\mathfrak{Re}(z_1\overline{z_2})+|z_2|^2\end{aligned}$$

   où on a utilisé dans la dernière équation la propriété vraie pour tout $z\in\mathbb{C}$: $z+\overline{z}=2\mathfrak{Re}(z)$

   (b)

   $$\begin{aligned}\left|f(z)-\frac{7}{3}\right|^2&=\left|\frac{-z-4}{3(z+1)}\right|^2\\&=\frac{|z+4|^2}{9|z+1|^2}\\&=\frac{(z+4)\overline{(z+4)}}{9(z+1)\overline{(z+1)}}\\&=\frac{(z+4)(\overline{z}+4)}{9(z+1)(\overline{z}+1)}\\&=\frac{z\overline{z}+4(z+\overline{z})+16}{9(z\overline{z}+(z+\overline{z})+1)}\\&=\frac{|z|^2+8\mathfrak{Re}(z)+16}{9(|z|^2+2\mathfrak{Re}(z)+1)}\end{aligned}$$

(c) Pour tout $z \in S$, on a $|z|^2 = 4$ donc pour tout $z \in S$:

$$\begin{aligned}
\left|f(z) - \frac{7}{3}\right|^2 &= \frac{4 + 8\mathfrak{Re}(z) + 16}{9(4 + 2\mathfrak{Re}(z) + 1)} \\
&= \frac{8\mathfrak{Re}(z) + 20}{9(2\mathfrak{Re}(z) + 5)} \\
&= \frac{4(2\mathfrak{Re}(z) + 5)}{9(2\mathfrak{Re}(z) + 5)} \\
&= \frac{4}{9} \\
&= \left(\frac{2}{3}\right)^2
\end{aligned}$$

Ainsi pour tout $z \in S$ on a $f(z) \in S_2$. D'où

$$\boxed{f(S) \subset S_2.}$$

Exercice 3. On considère les points $A(1, 2, -1)$, $B(-2, 4, 0)$ et $C = (2, 2, -2)$

1. Déterminer une représentation paramétrique de (AB).
2. Déterminer une équation cartésienne du plan P qui passe par les points A, B et C.
3. En fonction de $m \in \mathbb{R}$, déterminer l'intersection de (AB) avec le plan $\mathcal{P}_m$ représentée par l'équation cartésienne
$$mx + y + z + 1 = 0$$
4. A quelle(s) condition(s) sur m, a-t-on $C \in P_m$?
5. A quelle(s) condition(s) sur m, P_m et P sont-ils parallèles ?
6. Ecrire une fonction Python nommée `dans_le_plan`, qui prend en argument un flottant `m` et une liste de flottants de taille 3, `M`, correspondant aux coordonnées d'un point M de l'espace et qui renvoie `True` si $M \in P_m$ et `False` sinon.

Correction 3.

1. La droite admet pour vecteur directeur $\vec{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Donc une équation paramétrique est donnée par : $\left\{\begin{array}{rcrcl} x & = & -3s & + & 1 \\ y & = & 2s & + & 2 \\ z & = & s & & , \end{array}\right.$ avec $s \in \mathbb{R}$.
2. Il suffit d'injecter l'équation paramétrique dans l'équation de P_m : On obtient
$$\begin{aligned}
(x, y, z) \in P_m \cap (AB) &\Longleftrightarrow m(-3s + 1) + 2s + 2 + s + 1 = 0 \\
&\Longleftrightarrow (-3m + 3)s + m + 3 = 0
\end{aligned}$$
On distingue ensuite deux cas :
Si $-3m + 3 = 0$ c'est-à-dire si $m = 1$ alors
$$(x, y, z) \in P_m \cap (AB) \Longleftrightarrow 4 = 0$$
$$\boxed{P_m \text{ n'intersecte pas } (AB)}$$

Si $-3m+3 \neq 0$ c'est-à-dire si $m \neq 1$ alors

$$(x,y,z) \in P_m \cap (AB) \Longleftrightarrow s = \frac{m+3}{3m-3}$$

et donc $\left\{\begin{array}{rclcl} x & = & -3\frac{m+3}{3m-3} & + & 1 \\ y & = & 2\frac{m+3}{3m-3} & + & 2 \\ z & = & \frac{m+3}{3m-3} & & , \end{array}\right.$

Soit en simplifiant : $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & \frac{-4}{m-1} \\ y & = & \frac{8m}{3m-3} \\ z & = & \frac{m+3}{3m-3} \quad , \end{array}\right.$

$$\boxed{P_m \text{ intersecte } (AB) \text{ au point de coordonnées : } (\tfrac{-4}{m-1}, \tfrac{8m}{3m-3}, \tfrac{m+3}{3m-3})}$$

Exercice 4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $E_n = [\![1, n]\!]$. On note $S_{n,p}$ le nombre de surjections de E_n sur E_p.

1. Calculer $S_{n,p}$ si $p > n$.
2. Justifier grâce au cardinal qu'une surjection de E_n dans E_n est une bijection. En déduire $S_{n,n}$.
3. Déterminer $S_{n,1}$.
4. Combien y-a-t-il d'applications de E_n dans E_2 ? Parmi ces applications lesquelles ne sont pas surjectives ? En déduire $S_{n,2}$.
5. Soit f une surjection de E_{p+1} dans E_p, justifier que tous les éléments de E_p ont exactement un antécédent sauf un qui en a exactement deux. En déduire que $S_{p+1,p} = \frac{p}{2}(p+1)!$

   On suppose désormais que $0 < p \leq n$.
6. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k}(-1)^k = 0$
7. Montrer que pour tout (k, q) tel que $0 \leq q \leq k \leq p$
$$\binom{p}{k}\binom{k}{q} = \binom{p}{q}\binom{p-q}{k-q}.$$
8. (a) En déduire que, si $0 \leq q < p$, alors
$$\sum_{k=q}^{p} \binom{p}{k}\binom{k}{q}(-1)^k = 0.$$
   (b) Que vaut la somme précédente quand $q = p$?
9. Montrer que pour tout entier q de E_p le nombre d'applications de E_n dans E_p ayant un ensemble d'images à q éléments est égal à $\binom{p}{q} S_{n,q}$.
10. En déduire que pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^2$
$$p^n = \sum_{q=1}^{p} \binom{p}{q} S_{n,q}.$$
11. Montrer que pour tout (k, q) tel que $0 \leq q \leq k \leq p$ on a :
$$\sum_{k=1}^{p}(-1)^k\binom{p}{k}k^n = \sum_{q=1}^{p}\left(\sum_{k=q}^{p}(-1)^k\binom{p}{k}\binom{k}{q}\right)S_{n,q}.$$
    On pourra sommer la relation obtenue à la question précédente en veillant à changer le nom des variables puis intervertir la somme double.
12. A l'aide des questions précédentes (8, 10, 11 notamment), en déduire que
$$S_{n,p} = (-1)^p\sum_{k=1}^{p}(-1)^k\binom{p}{k}k^n.$$

Correction 4.

1. D'après le cours si il existe une surjection de $E \to F$ alors $\mathrm{Card}(E) \geq \mathrm{Card}(F)$. Ainsi $S_{n,p} = 0$ dès que $p > n$.

2. Si $f : E_n \to E_n$ est une surjection alors tous les éléments de l'image ont au moins un antécédents par définition. Mais ils ont au plus un antécédent sinon le cardinal de $f(E_n)$ serait strictement plus petit que celui de E_n. Ainsi d'après le cours $S_{n,n} = n!$.
3. Il n'y a qu'une seule application de E_n dans E_1 : l'application constante égale à 1. Cette application est bien surjcetive, donc $S_{n,1} = 1$.
4. Il y a 2^n applications de E_n dans E_2 (cf cours). Seules les applications constantes (l'application constante à 1 et celle constante à 2) ne sont pas surjectives. On trouve alors

$$S_{n,2} = 2^n - 2.$$

5. Soit f une surjection de E_{p+1} dans E_p. Tous les éléments ont au moins un antécédent par définition d'une surjection. Comme $\mathrm{Card}(E_{p+1}) = \mathrm{Card}\, E_p + 1$ il y a un élément de E_p qui a deux antécédents.

   On choisit les deux éléments qui auront la même image : il y a $\binom{p+1}{2}$ façons de choisir 2 éléments dans E_{p+1}. Ensuite, choisir à chaque éléments une image revient à choisir une bijection entre deux ensembles à p éléments, soit $p!$ choix . On a alors

$$S_{p+1,p} = \binom{p+1}{2} p! = \frac{p(p+1)}{2} p! = \frac{p}{2}(p+1)!.$$

6. C'est le binôme de Newton

$$\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (-1)^k = (1 + (-1))^p = 0^p = 0.$$

7. On a d'une part

$$\begin{aligned}\binom{p}{k}\binom{k}{q} &= \frac{p!}{k!(p-k)!} \frac{k!}{q!(k-q)!} \\ &= \frac{p!}{(p-k)!q!(k-q)!}\end{aligned}$$

   et d'autre part :

$$\begin{aligned}\binom{p}{q}\binom{p-q}{k-q} &= \frac{p!}{q!(p-q)!} \frac{(p-q)!}{(k-q)!(p-q-(k-q))!} \\ &= \frac{p!}{q!(k-q)!(p-k))!}\end{aligned}$$

   On obtient bien l'égalité demandée
8. (a) Soit $0 \leq k < p$

$$\begin{aligned}\sum_{q=k}^{p} \binom{p}{q}\binom{q}{k}(-1)^q &= \sum_{q=k}^{p} \binom{p}{k}\binom{p-k}{q-k}(-1)^q && \text{D'après Q7} \\ &= \binom{p}{k} \sum_{q=k}^{p} \binom{p-k}{q-k}(-1)^q && \binom{p}{k} \text{ ne dépend pas de } q \\ &= \binom{p}{k} \sum_{j=0}^{p-k} \binom{p-k}{j}(-1)^{(j+k)} && \text{Changement d'indice } q = j+k \\ &= \binom{p}{k}(-1)^k \sum_{j=0}^{p-k} \binom{p-k}{j}(-1)^j \\ &= 0 && \text{D'après Q6}\end{aligned}$$

(b) Si $k=p$ on cherche la valeur de

$$\sum_{q=p}^{p}\binom{p}{q}\binom{q}{p}(-1)^q$$

Il y a qu'un seul terme dans cette somme, il vaut $(-1)^p$.

9. Pour compter le nombre d'applications qui ont pour image q éléments il suffit de dénombre les images possibles (q éléments parmis E_p) : $\binom{p}{q}$. Ce choix fait, il suffit de dénombre les applications E_n dans E_p qui ont exactement ces q élements comme image : c'est-à-dire par définitin $S_{n,q}$. Ainsi il y a $\binom{p}{q}S_{n,q}$ applications qui ont pour image q éléments dans E_p.
10. On regarde la partition suivante

$$\{\text{ applications } E_n \to E_p\} = \bigcup_{q=1}^{n}\{\text{ applications } E_n \to E_p \text{ qui ont exactement } q \text{ images}\}$$

On a $\text{Card}(\{\text{ applications } E_n \to E_p\}) = p^n$ et
$\text{Card}\bigcup_{q=1}^{n}\{\text{ applications } E_n \to E_p \text{ qui ont exactement } q \text{ images}\} = \sum_{q=1}^{n}\text{Card}\{\text{ applications } E_n \to E_p \text{ qui ont exactement } q \text{ images}\} = \sum_{q=1}^{n}\binom{p}{q}S_{n,q}$ D'où

$$p^n = \sum_{q=1}^{n}\binom{p}{q}S_{n,q}$$

11. On repart de la formule obtenue à la question précédente, dont on va changer le noms des variables pour se rapprocher de la formule demandée :

$$k^n = \sum_{q=1}^{n}\binom{k}{q}S_{n,q}$$

Donc

$$\sum_{k=1}^{p}(-1)^k\binom{p}{k}k^n = \sum_{k=1}^{p}\sum_{q=1}^{n}(-1)^k\binom{p}{k}\binom{k}{q}S_{n,q}$$

Remarquons que la somme de droite vaut 0 pour $q>k$ à cause de $\binom{k}{q}$. On a donc

$$\sum_{k=1}^{p}(-1)^k\binom{p}{k}k^n = \sum_{k=1}^{p}\sum_{q=1}^{k}(-1)^k\binom{p}{k}\binom{k}{q}S_{n,q}$$

Comme suggéré par l'énoncé on fait maintenant une interversion de somme
$\sum_{k=1}^{p}\sum_{q=1}^{k}(-1)^k\binom{p}{k}\binom{k}{q}S_{n,q} = \sum_{q=1}^{p}\sum_{k=q}^{p}(-1)^k\binom{p}{k}\binom{k}{q}S_{n,q}$ Avec l'équation précédente on obtient bien le résultat désiré :

$$\sum_{k=1}^{p}(-1)^k\binom{p}{k}k^n = \sum_{q=1}^{p}\left(\sum_{k=q}^{p}(-1)^k\binom{p}{k}\binom{k}{q}\right)S_{n,q}.$$

12. D'après 8a),b) on sait que pour $q < p$

$$\sum_{k=q}^{p} \binom{p}{k}\binom{k}{q}(-1)^k = 0$$

et pour $q = p$

$$\sum_{k=q}^{p} \binom{p}{k}\binom{k}{q}(-1)^k = (-1)^p$$

Ainsi dans la double somme de 11, la somme la plus intérieure vaut 0 sauf si $q = p$, on obtient ainsi :

$$\sum_{q=1}^{p}\left(\sum_{k=q}^{p}(-1)^k\binom{p}{k}\binom{k}{q}\right)S_{n,q} = (-1)^p S_{n,p}$$

D'après la formule préalablement obtenue en 11, on obtient

$$\sum_{k=1}^{p}(-1)^k\binom{p}{k}k^n = (-1)^p S_{n,p}$$

Soit

$$S_{n,p} = (-1)^p\sum_{k=1}^{p}(-1)^k\binom{p}{k}k^n$$

(où on utilise $\frac{1}{(-1)^p} = \frac{(-1)^p}{(-1)^{2p}} = (-1)^p$)

Exercice 5 (Matrices de Hadamard)**.**

Une matrice carrée $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite de **Hadamard** si tous ses coefficients appartiennent à $\{-1, 1\}$ et tel que

$$M^T M = nI_n$$

Par exemple, la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

est une matrice de Hadamard. Dans cet exercice, nous considèrerons des matrices sous forme de tableau `numpy`.

On considère que le module `numpy`, permettant de manipuler des tableaux à deux dimensions, est importé via `import numpy as np`.

1. Écrire une fonction `Transposition(M)` qui prend en argument une matrice carrée M et renvoie sa transposée (on n'utilisera pas la fonction `transpose` de la bibliothèque `numpy`).
2. Écrire une fonction `Egalite(M,N)` qui prend en argument deux matrices M et N et qui renvoie `True` si elles sont égales et `False` sinon. Attention, le `==` entre deux tableaux `M`, `N` numpy ne renvoie pas un booléen : Si les deux tableaux ne sont pas de la même taille, alors il renvoie une erreur, sinon il renvoie un tableau numpy de booléens dont l'entrée (i,j) est la valeur `M[i][j]== N[i][j]`
3. Écrire une fonction `Hadamard(M)` qui prend en argument une matrice carrée M et renvoie `True` si c'est une matrice de Hadamard et `False` sinon.

   On peut montrer (on ne demande pas de le faire) que si M est une matrice de Hadamard symétrique, alors la matrice $\begin{pmatrix} M & M \\ M & -M \end{pmatrix}$ est encore une matrice de Hadamard.

   Par exemple si $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, on obtient $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Cette construction est dûe à Sylvester.
4. Écrire une fonction `Symetrique(M)` qui prend en argument une matrice M et qui renvoie `True` si M est symétrique et `False` sinon.
5. Écrire une fonction `Duplication(M)` qui prend en argument une matrice M qui teste si c'est une matrice de Hadamard symétrique et qui renvoie $\begin{pmatrix} M & M \\ M & -M \end{pmatrix}$ si elle l'est et qui renvoie une matrice nulle de même taille que $\begin{pmatrix} M & M \\ M & -M \end{pmatrix}$ sinon.

Annexe : Rappel Python

Pour une matrice M à n lignes et p colonnes, les indices vont de 0 à $n-1$ pour les lignes et de 0 à $p-1$ pour les colonnes.

Python	**Interprétation**
`M[i,j]`	Coefficient d'indice (i, j) de la matrice M
`np.zeros((n,p))`	Matrice à n lignes et p colonnes remplie de zéros
`np.eye(n)`	Matrice identité de taille n
`T = np.shape(M)`	Dimensions de la matrice M
`T[0]` ou `np.shape(M)[0]`	Nombre de lignes
`T[1]` ou `np.shape(M)[1]`	Nombre de colonnes
`np.dot(M,N)`	Produit de la matrice MN

Correction 5.

```
import numpy as np
A=np.array([[1,1],[1,-1]])

def transposition(M):
    n=np.shape(M)[0]
    mat=np.zeros((n,n))
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            mat[i,j]=M[j,i]
    return mat


def egalite(M,N):
    if np.shape(M)!=np.shape(N):
        return False
    (n,p)=np.shape(M)
    for i in range(n):
        for j in range(p):
            if M[i,j]!=N[i,j]:
                return False
    return True


def Hadamard(M):
    n=np.shape(M)[0]
    mat=np.dot(M,transposition(M))
    return egalite(mat,n*np.eye(n))

def symetrique(M):
    return egalite(M,transposition(M))

def Duplication(M):
    n=np.shape(M)[0]
    mat=np.zeros((2*n,2*n))
    if not(symetrique(M)) or not(Hadamard(M)):
        return mat
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            mat[i,j]=M[i,j]
            mat[i,j+n]=M[i,j]
            mat[i+n,j]=M[i,j]
            mat[i+n,j+n]=-M[i,j]
    return mat

def Sylvester(n):
    A=np.array([[1,1],[1,-1]])
    for i in range(n):
        A= Duplication(A)
    return A
```