Programme de colle : Semaine 17
Lundi 5 février

I Cours

1. Vocabulaire des applications
   (a) Images, antécédents, image directe d'un ensemble par une fonction
   (b) Fonctions injectives, surjectives, bijectives
   (c) Théorème des valeurs intermédiaires, théorème de la bijection.
   (d) Bijections réciproques.
   (e) Dans le cas des fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, calcul de la dérivée de la bijection réciproque.
2. Limites
   (a) Définition des limites en un point et en l'infini avec les quantificateurs. Limites à gauche et limites à droite.
   (b) Calcul sur les limites : sommes, produits, composition de limites.
   (c) Caractérisation d'une limite en terme de suites convergentes. Contraposée pour montrer que des fonctions n'admettent pas de limites
   (d) Limites et inégalités : passage aux inégalités larges, théorème d'encadrement, théorème de comparaison.
   (e) Limite d'une fonction monotone.
   (f) Etudes des branches infinies d'une fonction : asymptote verticale, droite asymptotique. Position du graphe par rapport à la tangente.
   (g) Théorème des croissances comparées. Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$, on a :
      - $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^b}{x^a} = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^a(\ln x)^b = 0$
      - $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^a}{e^{bx}} = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x^a e^{bx} = 0$
3. Equivalents
   (a) Définition des équivalents $\lim \frac{f}{g} = 1$. ⚠ Par définition $f \sim 0$ n' a pas de sens. ⚠
   (b) Opérations algébriques : produit, quotient, mis à la puissance.
   (c) ⚠ On ne compose pas un équivalent avec une fonction –> Contre exemple avec exp. Par contre on peut faire un changement de variable (appelé substitution dans le cours) : Soit $t_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Soient f, g deux fonctions définies sur I et soit u une fonction définie sur un voisinage de t_0 et telle que $\lim_{t\to t_0} u(t) = x_0$. Alors
   $$f \underset{x_0}{\sim} g \quad \Longrightarrow \quad f \circ u \underset{t_0}{\sim} g \circ u.$$
   (d) Equivalents usuels :
      - $\sin x \underset{0}{\sim} 1$
      - $\cos x - 1 \underset{0}{\sim} 1$
      - $\tan x \underset{0}{\sim} 1$
      - $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} 1$
      - $e^x - 1 \underset{0}{\sim} 1$
      - $(1+x)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} 1$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^\star$.
4. Informatique
   (a) Parcours de listes.
   (b) Chaînes de caractères.
   (c) Tableau numpy

II Exercices Types

Exercice 1. On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : $x \mapsto x^3 - 3x$.

1. Étudier les variations de f.
2. Déterminer $f([1,2])$, $f(\mathbb{R})$, $f([-1,+\infty[)$.
3. f est-elle injective ?

Exercice 2. Étudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité des applications suivantes. Lorsqu'elles sont bijectives, déterminer les applications réciproques.

1. $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array} \right.$
2. $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array} \right.$
3. $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & x+1 \end{array} \right.$
4. $f : \left| \begin{array}{ccc} [-1,1] & \to & [0,1] \\ x & \mapsto & |x| \end{array} \right.$
5. $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3 \end{array} \right.$
6. $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \exp(x) \end{array} \right.$

Exercice 3. Soit $f : [1,+\infty[\to [0,+\infty[$ telle que $f(x) = x^2 - 1$. f est-elle une bijection ?

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$.

1. L'application f est-elle injective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$? Surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?
2. Montrer que la restriction $g : \left| \begin{array}{ccc} [-1,1] & \to & [-1,1] \\ x & \mapsto & f(x) \end{array} \right.$ est une bijection.
3. Exprimer g^{-1}
4. Justifier que g^{-1} est dérivable et calculer la dérivée de g^{-1} (dur).

Exercice 5. Calculer les limites et un équivalent simpledes fonctions suivantes aux bornes de leur domaine de définition. Interpretation géométrique le cas échéant.

1. $f(x) = e^{x^2+x+1}$
2. $f(x) = e^{2x} - e^{x}$
3. $f(x) = \dfrac{e^x + x^2 + x + 1}{e^{2x}+1}$
4. $f(x) = \dfrac{x}{x-1} e^{\frac{1}{x}}$
5. $f(x) = e^{x^2} - e^{x+1}$
6. $f(x) = \ln\left(\dfrac{e^x+1}{e^x-1}\right)$
7. $f(x) = \ln\left(\dfrac{e^x+x^2}{2x+1}\right)$
8. $f(x) = \ln\left(\dfrac{2-x}{x+4}\right)$
9. $f(x) = \dfrac{2^x}{x^2+1}$
10. $f(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x \ln x$
11. $f(x) = \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{x^2}$
12. $f(x) = e^x - x^{\frac{2}{3}}$
13. $f(x) = e^{\frac{1}{x-2}}$
14. $f(x) = (2x-1)e^{\frac{1}{x-2}}$
15. $f(x) = \dfrac{\ln(x^2+1)}{x}$