

Chapitre 19 : Continuité

Table des matières

I	Continuité en un point	1
I. 1	Définition de la continuité en un point :	1
I. 2	Continuité à droite et à gauche en un point	2
I. 3	Lien entre continuité à droite, à gauche et continuité en un point	2
II	Continuité sur un intervalle	3
II. 1	Définition de la continuité sur un intervalle	3
II. 2	Continuité des fonctions usuelles	3
II. 3	Continuité et opérations algébriques	3
II. 4	Continuité et composition entre deux fonctions	3
III	Prolongement par continuité	5
III. 1	Prolongement par continuité	5
III. 2	Prolongement par continuité à droite et à gauche	5
IV	Théorèmes sur les fonctions continues définies sur un intervalle	6
IV. 1	Composition entre une fonction et une suite, application aux suites récurrentes :	6
IV. 2	Théorème des valeurs intermédiaires	6
IV. 3	Théorème de la bijection	6
IV. 4	Fonction continue sur un segment	7

Dans tout ce qui suit, les fonctions considérées sont des fonctions numériques.

f désigne une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Son domaine de définition noté \mathcal{D}_f est un intervalle ou une réunion d'intervalles.

I Continuité en un point

I. 1 Définition de la continuité en un point :

Définition 1. Soit $x_0 \in \mathcal{D}_f$. On dit que la fonction f est continue en x_0 si

Exercice 2. 1. Étudier la continuité en 0 de la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} x \ln(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

2. Étudier la continuité en 1 de la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(x)}{x-1} & \text{si } x > 0, x \neq 1 \\ 2 & \text{si } x = 1. \end{cases}$

I. 2 Continuité à droite et à gauche en un point

Lorsque la fonction se comporte de façon différente à droite et à gauche de $x_0 \in \mathcal{D}_f$, on doit regarder la continuité à droite et à gauche en x_0 .

Exemple type : les fonctions définies par des raccords.

Définition 3. Soit f une fonction définie en x_0 . On suppose que x_0 n'est pas une borne de \mathcal{D}_f .

- On dit que la fonction f est continue à droite en x_0 si
- On dit que la fonction f est continue à gauche en x_0 si

Exercice 4. Étudier la continuité en 0 à droite et à gauche de la fonction partie entière.

I. 3 Lien entre continuité à droite, à gauche et continuité en un point

Proposition 5. Soit f une fonction définie en x_0 , où x_0 n'est pas une extrémité de \mathcal{D}_f . On a alors :

f continue en $x_0 \iff \dots \iff \dots$

Exemple 1. Étudier la continuité en 0 de la fonction partie entière.

Exercice 6. Étudier la continuité au point de raccord des fonctions suivantes :

$$1. f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{e^x - 1}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$2. f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$3. f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(3x)}{e^x - 1} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{1}{2} & \text{si } x = 0 \\ \frac{\sqrt{1-x}-1}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$4. f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x^2)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

II Continuité sur un intervalle

II. 1 Définition de la continuité sur un intervalle

Définition 7. Soit I un intervalle de \mathbb{R} non réduit à un point.

- Une application $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dite continue sur I si
- L'ensemble des fonctions continues sur I est noté ou
- On dit que f

II. 2 Continuité des fonctions usuelles

En repassant par la définition, on peut ainsi démontrer la continuité des fonctions usuelles suivantes :

.....
.....

II. 3 Continuité et opérations algébriques

Proposition 8. Soient I un intervalle quelconque de \mathbb{R} et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Si f et g sont deux éléments de $\mathcal{C}(I)$ alors

-
-
-
-

II. 4 Continuité et composition entre deux fonctions

Proposition 9. Soient I et J deux intervalles de \mathbb{R} .

Si $f \in \mathcal{C}(I)$ et $g \in \mathcal{C}(J)$ avec $f(I) \subset J$ alors

Méthode pour montrer la continuité sur un intervalle :

Par somme, produit, composée, quotient dont le dénominateur ne s'annule pas de fonctions usuelles.

Exercice 10. Étudier la continuité sur \mathcal{D}_f des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{2}}$

2. $f(x) = \frac{e^{-x^2}}{x}$

3. $f(x) = \ln(e^{-x^4} + 3)$

4. $f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

5. $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(x)}{\tan(\pi x)} & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

III Prolongement par continuité

La fonction f est définie au voisinage de x_0 MAIS PAS en x_0 : $x_0 \notin \mathcal{D}_f$. On calcule donc $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ pour savoir si on peut prolonger par continuité la fonction en x_0 .

III. 1 Prolongement par continuité

Définition 11. Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et une fonction f telle que : $\begin{cases} f \text{ non définie en } x_0 \\ f \text{ admet une limite finie en } x_0 \text{ notée } l. \end{cases}$

Alors la fonction \tilde{f} définie par :
s'appelle le prolongement par continuité de f en x_0 . Par abus de notation, on la note encore

III. 2 Prolongement par continuité à droite et à gauche

Lorsque la limite en x_0 n'existe pas, cela vient le plus souvent du fait que les limites en x_0 à droite et à gauche ne sont pas les mêmes. On peut alors regarder si la fonction est prolongeable par continuité à droite ou à gauche.

Proposition 12. Existence du prolongement par continuité à droite ou à gauche :
Soit f une fonction non définie en x_0 .

- Prolongement par continuité à droite :
 - ★ f admet un prolongement par continuité à droite en x_0 si
 - ★ Dans ce cas, le prolongement \tilde{f} est défini par :

- Prolongement par continuité à gauche :
 - ★ f admet un prolongement par continuité à gauche en x_0 si
 - ★ Dans ce cas, le prolongement \tilde{f} est défini par :

Exercice 13. Étudier les éventuels prolongements par continuité des fonctions suivantes :

1. $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$
2. $g(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{x-1} & \text{si } x > 1 \\ \frac{x}{-x^2 - x + 2} & \text{si } x < 1. \end{cases}$

IV Théorèmes sur les fonctions continues définies sur un intervalle

IV. 1 Composition entre une fonction et une suite, application aux suites récurrentes :

On rappelle le résultat vu lors du chapitre sur les suites.

Proposition 14. Soient f une fonction numérique définie sur \mathcal{D}_f et une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
Si

-
-

Alors

Exercice 15. Calculer les limites éventuelles de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_0 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = \ln(2 + x)$.

IV. 2 Théorème des valeurs intermédiaires

Le théorème

Théorème 16. Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $(a, b) \in I^2$ avec $a < b$. Si on a :

-
-

alors pour tout y compris entre $f(a)$ et $f(b)$:

- Exercice 17.**
1. Montrer que toute fonction polynôme de degré 3 a au moins une racine réelle sur \mathbb{R} . De même montrer que toute fonction polynôme de degré impair a au moins une racine réelle sur \mathbb{R} .
 2. Soit $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ une fonction continue. Montrer qu'elle admet un point fixe.
 3. Soient deux fonctions continues $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant $f(0) > g(0)$ et $f(1) < g(1)$. Montrer qu'il existe $c \in]0, 1[$ tel que $f(c) = g(c)$.

IV. 3 Théorème de la bijection

Théorème de la bijection et fonction réciproque

Théorème 18. Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Si on a :

-
-

alors :

-
-
-

- Exercice 19.**
1. Étude de la bijectivité de la fonction $f : x \mapsto x^3 + 2^x$.
 2. Étude de la bijectivité de la fonction $f : x \mapsto \frac{x+2}{x-2}$. Donner ensuite l'expression de f^{-1} .

Fonction arctangente

Proposition 20. La fonction tangente est bijective dedans
 Sa fonction réciproque est la fonction arctangente, définie dedans, et notée On a de plus :

- Monotonie : la fonction arctangente est
- Parité : la fonction arctangente est

Fonctions arccosinus et arcsinus

Ces fonctions ne font pas partie des fonctions usuelles du programme : il faut refaire la démonstration pour démontrer leur existence et leurs propriétés.

- Exercice 21.**
- Montrer que la fonction cosinus est bijective de $[0, \pi]$ dans $[-1, 1]$. Sa bijection réciproque est appelée fonction arccosinus, et est notée arccos. Faire sa représentation graphique.
 - Montrer que la fonction sinus est bijective de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ dans $[-1, 1]$. Sa bijection réciproque est appelée fonction arcsinus, et est notée arcsin. Faire sa représentation graphique.

- Exercice 22.**
1. Étude des points fixes de la fonction tangente sur $\left] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[$.
 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Montrer qu'il existe un unique $u_n \in \left] 2n\pi, 2n\pi + \frac{\pi}{2} \right[$ tel que $u_n \sin(u_n) = 1$.

IV. 4 Fonction continue sur un segment

Définition 23. Définition d'un segment de \mathbb{R} :

Un segment de \mathbb{R} est

- Exemples.**
- Exemples de segment de \mathbb{R} :
 - Exemples d'intervalles de \mathbb{R} non segment :

Théorème 24. Théorème d'une fonction continue sur un segment :

-
- Plus précisément, si f est continue sur $[a, b]$ alors :

Exercice 25. Montrer que la fonction f définie par $f(x) = x^{12} - 2x^5 + 3x^3 - 1$ admet un minimum sur \mathbb{R} .