Programme de colle : Semaine 22
Lundi 25 Mars

1 Cours

1. Continuité
   - Définition de la continuité (+ continuité à droite et à gauche)
   - Prolongement par continuité.
   - Composition d'une suite avec une fonction continue (étude des limites possibles d'une suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$)
   - Théorème sur la continuité :
     - TVI + théorème de la bijection
     - Une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.
2. Espace vectoriel – Seul l'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$ et ses sous-espaces vectoriels sont au programme en BCPST1
   - Définition d'un espace vectoriel et stabilité par combinaison linéaire d'un sous-espace vectoriel.
   - Famille de vecteurs, Espace vectoriel engendré.
   - Famille génératrice d'un espace vectoriel.
   - Famille libre.
   - Base.
   - Dimension d'un espace vectoriel.
   - $F \subset G \Longrightarrow \dim F \leq \dim G$
   - $F \subset G$ et $\dim F = \dim G \Longrightarrow F = G$
   - Cardinal maximal d'une famille libre dans un espace de dimension p
   - Cardinal minimal d'une famille génératrice dans un espace de dimension p
   - Une famille libre à p éléments dans un espace de dimension p est une base.
   - Une famille génératrice à p éléments dans un espace de dimension p est une base.
3. Informatique
   (a) Parcours de listes.
   (b) Modélisation d'une expérience aléatoire a l'aide de de la bibliothèque `random` plus particulièrement des fonctions `randint()` et `random`

2 Exercices Types

Exercice 1. *Étudier la continuité des fonctions suivantes :*

1. $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & si\ x > 0 \\ 0 & sinon \end{cases}$

2. $g(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1-4x)}{2x} & si\ x < 0 \\ 1 & si\ x = 0 \\ \dfrac{e^x - 1}{x} & si\ x > 0 \end{cases}$

3. $h(x) = \begin{cases} \dfrac{5x^2 + 4x}{1+x} & si\ x < 0 \\ 1 & si\ x = 0 \\ x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & si\ x > 0 \end{cases}$

Exercice 2. *Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$?*

1. $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad 2x - y = 0\right\}$
2. $B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x - 3y + 1 = 0\right\}$
3. $C = \left\{(x+2y, y), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2\right\}$
4. $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x^2 + y^2 \leq 1\right\}$

Exercice 3. *Trouver une famille génératrice des espaces vectoriels suivants :*

1. $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, \quad x - y + z = 0 \text{ et } y - 2t = 0\}$
2. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad x + y + z = 0\}$
3. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad ax + by + z = 0\}$

Exercice 4. *Les familles suivantes de $\mathbb{R}^3$ sont-elles libres ou liées ? Si elle est liée, exprimer un vecteur comme combinaison linéaire des autres.*

1. $u = (1, -1, 0)$, $v = (2, 1, -1)$ *et* $w = (1, 5, -1)$
2. $u = (1, 1, 2)$, $v = (2, 1, 0)$ *et* $w = (3, 1, \lambda)$ λ *paramètre réel.*
3. $u = (1, 0, -2)$, $v = (2, 3, 1)$ *et* $w = (4, -2, 1)$
4. $u = (1, 1, -1)$, $v = (1, -1, 1)$, $w = (-1, 1, 1)$ *et* $t = (1, 1, 1)$

Exercice 5. *Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E. Donner une base de F et sa dimension.*

1. $E = \mathbb{R}^3$ *et* $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad x - y + 3z = 0 \text{ et } 2x - y + z = 0\}$
2. $E = \mathbb{R}^3$ *et* $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad x - y + 4z = 0\}$
3. $E = \mathbb{R}^3$ *et* $F = \{(x + 2y - 2z, -x + 3y - z, x + 7y - 5z), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\}$
4. $E = \mathbb{R}^4$ *et* $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, \quad 2xy + z - t = 0 \text{ et } x - y + z + t = 0 \text{ et } x + 2y - at = 0\}$ *avec a un paramètre réel.*